

NOV 18
1938

NOV 17 1938

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
H. GEIGER

110. BAND. 9. UND 10. HEFT

MIT 32 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 30. SEPTEMBER 1938)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1938

Die

Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Auch verpflichtet sich der Autor, die Arbeit nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen.

Manuskriptsendungen sind an die **Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24**, zu richten.

Die Autoren erhalten eine Fahrenkorrektur. Eine 2. (Umbruch-) Korrektur wird nur auf ausdrücklichen Wunsch übersandt, weil dadurch in der Regel das Erscheinen der Arbeit erheblich verzögert wird.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche **Textänderungen**, werden, soweit sie 10 % der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24.

Aufnahmebedingungen.

Nur solche Arbeiten können in die Zeitschrift für Physik aufgenommen werden, die den folgenden

Richtlinien

genügen:

1. Die Arbeit muß dem Gebiete der experimentellen oder theoretischen Physik angehören. Auch Arbeiten aus Nachbargebieten können aufgenommen werden. Ausgeschlossen sind jedoch Arbeiten mit rein mathematischem, astronomischem, mineralogischem oder chemischem Inhalt.

2. Die Einleitung der Arbeit soll den Leser in knappen Sätzen in die Vorgeschichte des Problems einführen. Je stärker ein Problem im Vordergrund des Interesses steht, desto kürzer kann die Einleitung gehalten werden.

3. Das Ziel der Arbeit muß schon in der Einleitung klar ausgesprochen werden. Es soll dabei auch ersichtlich sein, inwieweit die Erreichung des gesteckten Zieles einen im Rahmen der heutigen Physik wertvollen wissenschaftlichen Fortschritt bedeutet.

4. Die Beschreibung von Versuchsapparaten soll sich keinesfalls in technische Einzelheiten verlieren. Nur apparative Neuheiten von grundsätzlicher Bedeutung sind von Interesse. Die bildliche Wiedergabe von Apparaten soll durch schematische Zeichnung, nicht durch Photographie erfolgen.

5. Es ist fast immer ausreichend, von den Meßreihen ein typisches Beispiel herauszugreifen. An diesem Beispiel soll aber ersichtlich bzw. kontrollierbar sein, wie die Auswertung erfolgt ist, wie die Rechnungen durchgeführt wurden, welche Korrekturen angebracht sind usw.

6. Die Meßergebnisse sind *entweder* in Tabellen *oder* in Kurven wiederzugeben. Nur in Ausnahmefällen kann es gerechtfertigt sein, dasselbe Zahlenmaterial sowohl in Tabellen wie in Kurvenform zu veröffentlichen.

7. Die Lesbarkeit einer Arbeit gewinnt sehr, wenn die Figuren und Tabellen durch gut durchdachte Beschriftung an sich schon verständlich sind. Jedenfalls sollen alle Figuren und Tabellen mit Unterschriften bzw. Überschriften versehen sein.

8. In theoretischen Arbeiten sollen die mathematischen Ausführungen gerade so ausführlich veröffentlicht werden, daß der Leser die vom Verfasser überwundenen Schwierigkeiten nicht nochmals von neuem überwinden muß. Elementare Rechnungen dürfen nur ganz kurz angedeutet werden. In Zweifelsfällen empfiehlt es sich, Zwischenrechnungen als Anhang in kleinem Druck zu bringen.

9. Die Diskussion der Ergebnisse und die sonstigen allgemeinen Erörterungen sollen in ihrer Ausführlichkeit dem Umfang der in der Arbeit gewonnenen neuen Erkenntnisse entsprechen. Eine kurze Meßreihe berechtigt noch nicht dazu, einen großen Fragenkomplex lehrbuchartig aufzurollen.

10. Jede Arbeit muß in sich abgeschlossen sein. Arbeiten, welche allein auf einen Versuchsvorschlag oder nur auf eine Verbesserung von Meßverfahren oder Meßinstrumenten abzielen, können in der Regel nicht aufgenommen werden.

11. Dissertationen oder Habilitationsschriften können nicht in voller Breite aufgenommen werden. Nur solche Auszüge werden veröffentlicht, die den vorliegenden Richtlinien entsprechen. Die Auszüge sind in einer Fußnote als gekürzte Dissertation usw. zu kennzeichnen.

12. Am Kopf jeder Arbeit soll eine Inhaltsangabe in Kleindruck stehen. In diese Inhaltsangabe sollen vor allem die Punkte aufgenommen werden, welche der Verfasser als seine neuen Ergebnisse und damit als den durch seine Arbeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritt ansieht.

Der Herausgeber: H. Geiger.

Über die Struktur undeformierter und einfach deformierter Gebiete in nematischen Schichten größerer Dicke.

Von **H. Zocher** und **G. Ungar** in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Juli 1938.)

Von verschiedenen im parallelen polarisierten Licht homogen erscheinenden Gebieten in nematischen Schichten von Dicken bis 1 mm wurden die Interferenzfiguren im konvergenten polarisierten Licht beobachtet und zum Teil auch photographiert. Die Kurven gleichen Gangunterschiedes sind bei zwei Arten einfach deformierter Gebiete in Übereinstimmung mit ihrer Struktur, wie sie aus den Oseenschen Differentialgleichungen und den angenommenen Grenzbedingungen abgeleitet wurde. Durch die quantitative Auswertung der Interferenzfiguren von homöotropen Gebieten in bis zu 1 mm dicken Schichten von p-Acetoxybenzalazin konnte einwandfrei bewiesen werden, daß die Parallelorientierung der Moleküle auch in so dicken Schichten sich durch die ganze Tiefe der Schicht von einer Grenzfläche bis zur anderen erstreckt und nicht — wie es den Annahmen der Schwarmtheorie entsprechen würde — auf dünne Randschichten beschränkt ist.

1. Einleitung. Über die Struktur nematischer Schichten zwischen parallelen Glasplatten liegen zahlreiche Untersuchungen vor, von denen hier nur einige Arbeiten von Lehmann¹⁾, Vorländer²⁾, Mauguin³⁾ und Friedel⁴⁾ genannt seien. Diese Arbeiten enthalten viele für die Theorie des nematischen Zustandes wichtige Erkenntnisse, die aber anscheinend nicht genügend bekannt geworden sind, denn sie fanden — insbesondere von seiten der Vertreter der Schwarmtheorie — nur wenig Berücksichtigung bei den Diskussionen über die „Mesophasen“ bzw. „anisotropen Flüssigkeiten“ oder „flüssigen Kristalle“, die in den letzten Jahren mehrmals durchgeführt wurden. Es erscheint daher angebracht, an dieser Stelle eine knappe Übersicht über die wichtigsten Ergebnisse der obengenannten Forscher zu bringen.

Friedel (a. a. O.) unterscheidet für den allgemeinen Fall, d. h. bei nicht enantiomorphen Stoffen, im wesentlichen drei Arten von Strukturen: 1. Pseudomorphosen nach Kristallen, 2. Kernschichten (*plages a noyaux*), 3. homöotrope Schichten. Die *Kristallpseudomorphosen* liefern im parallelen polarisierten Licht einen Anblick wie ein Dünnschliff durch Granit oder

¹⁾ O. Lehmann, *Flüssige Kristalle*, Leipzig 1904. — ²⁾ D. Vorländer, *ZS. f. phys. Chem.* **57**, 357, 1907; **61**, 166, 1908; **93**, 516, 1919. — ³⁾ Ch. Mauguin, *Phys. ZS.* **12**, 1011, 1911; *C. R.* **151**, 886, 1910. — ⁴⁾ G. Friedel, *Ann. de Phys.* (9), **18**, 273, 1922.

ein ähnliches kristallines Gestein¹⁾. Die einzelnen einheitlichen Gebiete werden bei einer Drehung um 360° viermal hell und wieder dunkel. Nach den Untersuchungen von Mauguin²⁾ liefert jedes einzelne homogene Gebiet im konvergenten polarisierten Licht die Interferenzfiguren optisch einachsiger Kristallplatten mit verschiedener Neigung der optischen Achse zur Schnittfläche. Meist liegt die optische Achse dieser Gebiete (also auch die Längsachse der Moleküle) parallel zur Glaswand, häufig schräg, selten senkrecht zu ihr.

Die *Kernschichten* zeigen sich ebenfalls schon im parallelen Licht doppelbrechend, doch variiert die Auslöschungsrichtung von Ort zu Ort kontinuierlich; die Auslöschung ist „undulös“. Zwischen gekreuzten Nicols erscheint das Präparat in jeder Stellung von dunklen Streifen durchzogen, die von Unstetigkeitspunkten ausgehen. In der Nähe dieser Punkte sind die Streifen schmal, mit wachsender Entfernung werden sie breiter. Abbildungen solcher Strukturen findet man u. a. bei Friedel³⁾ und bei Zocher und Birstein⁴⁾, welche auch eine vollständige Analyse der Richtungsverteilung in einer Kernschicht durchgeführt haben. Nach Friedel liegt in den Kernschichten die optische Achse — die Längsachse der Moleküle — immer parallel zu den Wänden, beim Fortschreiten in der Richtung der Plattennormale bleibt die Molekülrichtung konstant. Wegen der raschen Änderung der Molekülrichtung mit dem Orte beim Fortschreiten parallel zu den Glasplatten liefern diese Schichten im konvergenten Licht meist keine deutlichen Interferenzfiguren.

Die *homöotropen Schichten* sind im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nicols in jeder Lage dunkel⁵⁾, ebenso wie senkrecht zur Achse geschnittene Platten einachsiger Kristalle, und sie zeigen auch die gleichen Interferenzfiguren im konvergenten Licht wie solche Kristallplatten. Daraus muß man schließen, daß in den homöotropen Gebieten (Lehmann bezeichnet sie als „pseudoisotrop“, Vorländer als „einachsig aufgerichtet“) die Moleküle mit der optischen Achse senkrecht zur Glaswand orientiert sind. Friedel nennt diese Schichten daher auch „plages normales“, Normal-schichten.

¹⁾ Eine Abbildung einer solchen Schicht im parallelen polarisierten Licht bringen z. B. G. u. E. Friedel, ZS. f. Kristallogr. **79**, 1, 1931, Fig. 4. —

²⁾ Ch. Mauguin, C. R. **151**, 886, 1910. — ³⁾ G. u. E. Friedel, a. a. O., Fig. 6.

— ⁴⁾ H. Zocher u. V. Birstein, ZS. f. phys. Chem. (A) **142**, 113, 1929, Fig. 1.

— ⁵⁾ Vollständige Dunkelheit ist natürlich nur bei kleiner Apertur zu beobachten; bei wachsender Apertur tritt zunehmende Aufhellung ein. Durch dieses Verhalten unterscheiden sich die homöotropen Gebiete von amorph-isotropen Gebieten.

Schichten, in welchen sich die Molekülrichtung beim Fortschreiten in Richtung der Plattennormalen ändert, hat Mauguin¹⁾ durch Verschieben bzw. Verdrehen des Deckglases gegenüber dem Objektträger bei Kristallpseudomorphosen hergestellt. Seine Beobachtungen faßt er dahin zusammen, daß der Übergang von der Lage der optischen Achse am Objektträger zu der Lage am Deckglas durch die Schicht hindurch immer stetig erfolgt.

Nach einer von Zocher²⁾ geäußerten Vermutung können einfache nematische Strukturen mit Richtungsänderung in Richtung der Plattennormalen auch spontan entstehen. Den bei p-Acetoxybenzalazin neben homöotropen Gebieten auftretenden Gebieten, die auch im parallelen Licht doppelbrechend erscheinen, schrieb er die folgende Struktur zu. An den beiden Grenzflächen sind die Moleküle wie in homöotropen Gebieten senkrecht zur Glaswand orientiert, in der Mitte der Schicht liegen sie aber zu den Wänden parallel; die Richtungsänderung vom Rand zur Mitte hin erfolgt stetig. Diese Gebiete sind von homöotropen Gebieten stets durch eine scharfe Trennungslinie abgegrenzt, welche mit einer Phasengrenze Ähnlichkeit besitzt, und zeigen die Tendenz sich zusammenzuziehen, während die homöotropen Gebiete sich entsprechend ausdehnen. Gebiete des gleichen Charakters sind offensichtlich auch schon von Friedel³⁾ bei Dibenzalbenzidin und von Vorländer⁴⁾ bei p-N-dimethylaminobenzal-1-aminonaphthalin-4-azobenzoesäure-äthylester beobachtet worden. Auch die von Tropper⁵⁾ an Präparaten von p-Acetoxybenzalazin beschriebenen „Gebiete zweiter Art“ dürften hierher gehören, obwohl Tropper angibt, daß sich die „Gebiete zweiter Art“ ausdehnen.

2. *Problemstellung.* Ein Ziel dieser Untersuchung war es, die oben dargestellte Hypothese Zochers über die Struktur der doppelbrechenden Gebiete in nematischen Schichten von p-Acetoxybenzalazin durch Beobachtung solcher Gebiete im konvergenten polarisierten Licht zu prüfen und auch allgemein die Interferenzfiguren einfach deformierter Gebiete zu ermitteln. Als einfach deformierte Gebiete werden hier diejenigen Gebiete bezeichnet, in denen die Molekülrichtung nur längs einer Koordinate variiert; im folgenden werden nur solche einfache Strukturen behandelt, in welchen alle Moleküle das gleiche Azimut besitzen, und in denen der Winkel zwischen

¹⁾ Ch. Mauguin, Bull. de l'Soc. fr. de Mineralogie **34**, 71, 1911. —
²⁾ H. Zocher, Kolloid-ZS. **75**, 161, 1936. — ³⁾ G. Friedel, a. a. O. S. 358. — ⁴⁾ D. Vorländer, Trans. Faraday Soc. **29**, 909, 1933. —
⁵⁾ H. Tropper, Ann. d. Phys. (5) **30**, 371, 1937.

Molekülrichtung und Plattennormale vom Abstand von der Wand abhängt¹⁾).

Gleichzeitig sollten auch die Interferenzfiguren von homöotropen Gebieten bei möglichst großen Schichtdicken ermittelt und quantitativ ausgewertet werden, um so die einwandfreie Entscheidung zu ermöglichen, ob die Orientierung der Moleküle sich von einer Wand bis zur anderen erstreckt, oder ob sie auf dünne Randschichten beschränkt ist. Obwohl nämlich schon Mauguin²⁾ gezeigt hatte, daß in nematischen Kristallpseudomorphosen von p-Azoxyphenetol die Moleküle auch bei Schichtdicken von 0,16 mm in der ganzen Tiefe der Schicht parallel zu den Wänden orientiert sind, gingen Ornstein und andere Vertreter der Schwarmtheorie vielfach von der Annahme aus, daß die Orientierung der nematischen Substanzen auf wenige Hundertstel mm dicke Randschichten an den Glasplatten beschränkt ist, während der innere Teil der Schicht durch rein statistische Verteilung der Achsenrichtungen der Molekülschwärme isotrop ist³⁾).

So hat kürzlich Tropper (a. a. O.) erklärt, daß in den homöotropen Gebieten (Tropper bezeichnet sie als „Gebiete erster Art“) in 0,5 mm dicken nematischen Schichten von p-Acetoxybenzalazin ein weitgehender Zerfall in Molekülschwärme unregelmäßiger Orientierung vorliegt, so daß das ganze Gebiet statistisch isotrop erscheint. Die Doppelbrechung der schon erwähnten Gebiete zweiter Art deutet er — gleichfalls im Sinne der Schwarmtheorie — durch die Hypothese dünner orientierter Randschichten. Fürth und Sitte⁴⁾ vertreten in einer theoretischen Untersuchung, die zum Teil auf den Versuchsergebnissen Troppers beruht, die gleichen Anschauungen, stützen aber ihre Annahmen nur auf allgemeine Überlegungen und verzichten auf eine experimentelle Prüfung, die durch Beobachtung im konvergenten polarisierten Licht einfach und eindeutig durchführbar ist.

3. *Versuchsanordnung.* Die Substanzen wurden in Schichten verschiedenster Dicke unter einem Polarisationsmikroskop im parallelen und konvergenten weißen sowie auch monochromatischen Licht beobachtet. Zu Untersuchungen bei höherer Temperatur wurde der Mikroschmelzapparat nach Kofler und Hilbek (C. Reichert, Wien) verwendet,

¹⁾ Ideal sind solche Strukturen nie realisiert, jedoch lassen sich leicht Gebiete finden, die für die Untersuchung im konvergenten Licht groß genug sind, und in denen die oben formulierten Bedingungen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt sind. — ²⁾ Ch. Mauguin, C. R. **151**, 886, 1910. — ³⁾ Vgl. z. B. L. S. Ornstein, Kolloid-ZS. **69**, 137, 1934. — ⁴⁾ R. Fürth u. K. Sitte, Ann. d. Phys. (5) **30**, 388, 1937.

wobei in den Heiztisch oberhalb des Präparates noch ein seitlich anliegendes, zentral durchbohrtes Kupferblech eingelegt wurde. Diese Vorrichtung verbessert die Temperaturkonstanz in dicken Präparaten wesentlich und vermindert auch die Sublimation an die Glasplatte des Heiztisches, die sonst bei längerer Beobachtung sehr störend wirkt.

Die Herstellung dickerer Präparate geschah in folgender Weise. Von einem Objektträger wurde ein annähernd quadratisches Stück abgeschnitten und an zwei parallele Seiten dieser Platte je ein oder zwei schmale Streifen eines Deckgläschens oder Objektträgers mit Silberchlorid angekittet. Diese Vorrichtung bildete, auf einen Objektträger gelegt, eine planparallele, an zwei Seiten offene Küvette, in welche die zu untersuchende Substanz im geschmolzenen Zustand einfließen gelassen wurde.

Zur Auswertung der Interferenzfiguren mußte für einige Substanzen einer der Brechungsexponenten bestimmt werden. Zu diesem Zweck wurde eine Abänderung der „Methode der senkrechten Inzidenz“¹⁾ ausgearbeitet, die es gestattet, bei Verwendung des Mikroschmelztisches Messungen auch bei höherer Temperatur und an sehr geringen Substanzmengen durchzuführen. Ähnlich wie oben beschrieben, wurde durch Ankitten eines ungefähr 1 mm dicken Glasstreifens an die kürzere Kante einer 5×7 mm großen Glasplatte und Auflegen auf einen Objektträger eine Keilküvette hergestellt, die mit der zu untersuchenden Substanz gefüllt eine bestimmte Ablenkung des senkrecht in den Objektträger eintretenden Lichtes bewirkt. Das Bild eines in der unteren Brennebene des Beleuchtungskondensors angebrachten feinen Drahtes, das unter Benutzung der Bertrandischen Hilfslinse sichtbar ist, erfährt durch die keilförmige Schicht eine Verschiebung, die mit guter Annäherung zu $n - 1$ proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor wurde durch Eichung mit Flüssigkeiten bekannter Brechung bestimmt. Es wurden nur Substanzen untersucht, deren Moleküle sich im nematischen Zustand senkrecht zum Glas orientieren, man erhält in diesem Falle den Brechungsindex für den ordentlichen Lichtstrahl.

4. *Die Orientierung nematischer Substanzen an Grenzflächen. Beobachtungen im parallelen polarisierten Licht.* Die Strukturen nematischer Schichten sind einerseits durch die Tendenz der Moleküle bestimmt, mit den Nachbarmolekülen möglichst kleine Winkel einzuschließen — diese Tendenz findet ihre mathematische Formulierung in den Oseenschen Differentialgleichungen — andererseits durch die Orientierung an den

¹⁾ F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 16. Aufl., S. 287.

Grenzflächen — die in der mathematischen Darstellung durch die Randbedingungen formuliert wird. Am häufigsten hat man mit folgenden Grenzflächen zu tun: Nematische Substanz — Glas, nematische Substanz — Luft und nematische Phase — amorphe Phase der gleichen Substanz. Zur Kennzeichnung der Orientierung an Grenzflächen werden die Abkürzungen eingeführt: *N*-Flächen für Flächen, an denen die Moleküle senkrecht orientiert sind, und *P*-Flächen für Grenzflächen, an denen die Moleküle parallel liegen. Außerdem werden noch die Abkürzungen *N*-Gebiete und *P*-Gebiete für homogene Gebiete verwendet, in denen die Moleküle durchwegs

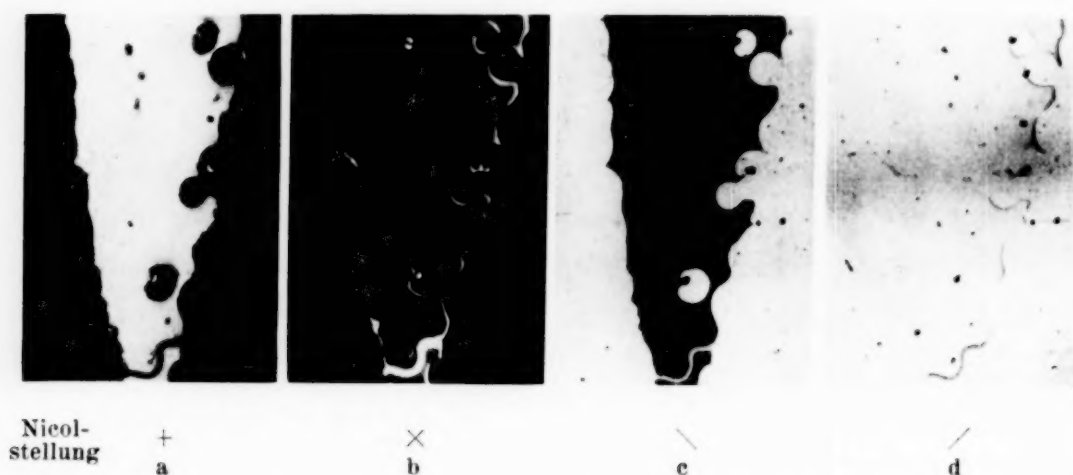


Fig. 1. Mikroaufnahmen einer unterkühlten nematischen Schicht von 1-Anisalamino-naphthalin-4-azobenzoessäureäthylester im parallelen polarisierten Licht. Aufnahme a und b bei gekreuzten Nicols, Aufnahme c und d nur mit Analysator. In Aufnahme a erscheint das homöotrope Gebiet (*N*-Gebiet) dunkel, das doppelbrechende Gebiet (*N-P-N*-Gebiet) hell. Die Moleküle des *N-P-N*-Gebietes liegen zur Schwingungsebene des Nicols in Aufnahme c parallel.

normal bzw. parallel zu den Wänden orientiert sind. *N*-Flächen bilden viele nematische Substanzen an Glasplatten, und zwar besonders leicht, wenn diese Platten vorher gründlich mit Säure behandelt worden sind; *P*-Flächen bilden sich ebenfalls an Glas, vorzugsweise an alkalibehandeltem. Auch die Grenzflächen an Luft und an der amorphen Phase sind meist *P*-Flächen¹⁾.

Im folgenden werden hauptsächlich die Erscheinungen an Schichten zwischen parallelen Glasplatten, an denen die Moleküle senkrecht orientiert sind, also Strukturen zwischen parallelen *N*-Flächen besprochen. Bei

¹⁾ Bei manchen Substanzen ist die Orientierung an Grenzflächen von der Temperatur abhängig, was von Friedel (a. a. O., S. 357) bei Anisal-p-amino-azotoluol und im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung z. B. bei dem oben genannten roten Azofarbstoff an der Grenzfläche nematisch-Luft beobachtet wurde. Auch geringe Mengen von Verunreinigungen beeinflussen die Orientierung, vgl. z. B. V. Zwetkoff, Acta phys. chem. U. R. S. S. **6**, 865, 1937.

Schichtdicken bis zu 0,2 mm bildet vielfach die ganze Schicht ein einheitliches, zwischen gekreuzten Nicols dunkles, N-Gebiet; oft treten aber auch doppelbrechende Gebiete auf, die von den N-Gebieten durch scharfe Linien getrennt sind (vgl. Fig. 1) und sich mehr oder weniger rasch zusammenziehen und verschwinden. Bei manchen Substanzen, wie z. B. bei p-Äthoxybenzalamino- α -methylzimtsäureäthylester, ziehen sich die doppelbrechenden Gebiete so blitzschnell zusammen, daß man sie nach dem Übergang aus dem amorphen in den nematischen Zustand nur durch wenige Sekunden beobachten kann. Bei dem schon erwähnten p-Acetoxybenzalazin und anderen Substanzen sind diese Strukturen manchmal beständiger und bleiben auch viertelstundenlang unverändert. Sehr geeignet zur Beobachtung der geschilderten Gebiete ist der von Vorländer hergestellte rote Azofarbstoff 1-Anisalamidonaphthalin-4-azobenzoessäureäthylester, der sich im nematischen Zustand durch rasches Abkühlen auf Zimmertemperatur unterkühlen läßt, worauf die Schichten dann ihre Struktur stundenlang unverändert beibehalten.

Fig. 1 zeigt vier Mikrophotographien dieser Substanz. Aufnahme a und b wurden bei gekreuzten Nicols hergestellt; in a ist die Lage des Präparates so gewählt, daß das doppelbrechende Gebiet größte Helligkeit zeigt, seine Auslöschungsrichtungen schließen also mit den Schwingungsrichtungen der Nicols Winkel von 45° ein; in b sind die beiden Nicols um 45° gegen a gedreht. Die Auslöschungsrichtungen des doppelbrechenden Gebietes fallen jetzt mit den Schwingungsrichtungen der Nicols zusammen, und das Gebiet erscheint ebenso dunkel wie das N-Gebiet. Bei den weiteren Aufnahmen wurde der starke Dichroismus der Substanz zur Erkennung der Molekülrichtung verwertet. Die Substanz ist positiv dichroitisch, d. h. sie absorbiert Licht, das in der Richtung der Längsachse des Moleküls schwingt, sehr stark, und Licht, dessen Schwingungsrichtung senkrecht zur optischen Achse ist, nur wenig. Wenn man nur durch einen Nicol beobachtet, erscheinen daher die Normalgebiete bei jeder Stellung des Präparates hell; die anderen Gebiete sind dunkel, wenn der Nicol der Molekülrichtung parallel ist (Fig. 1, Aufn. c) und ebenso hell wie die N-Gebiete bei der dazu senkrechten Nicolstellung (Aufn. d). Die Trennungslinien zwischen beiden Gebieten sind in allen vier Aufnahmen deutlich zu erkennen. Die Konturen des doppelbrechenden Gebietes setzen sich vorzugsweise aus konkaven Kreisbögen zusammen; man erkennt daran die Tendenz dieses Gebietes zur Kontraktion.

Bei großen Schichtdicken (0,5 bis 1 mm) erhält man auch zwischen N-Flächen zunächst nur sehr komplizierte Strukturen mit vielen Dis-

kontinuitätslinien und Richtungsänderung nach jeder Richtung des Raumes. Ein Teil der Fäden löst sich mit der Zeit spontan auf, andere, die zu metastabilen Strukturen gehören, lassen sich zum Verschwinden bringen, indem man durch schwache Erschütterungen des Präparates (Klopfen) die mechanische Energie zuführt, die notwendig ist, um die metastabile Struktur in eine einfachere überzuführen. So kann man schließlich auch in 1 mm dicken Schichten von p-Acetoxybenzalazin und anderen Substanzen¹⁾ N-Gebiete und doppelbrechende Gebiete einheitlicher Auslöschung erhalten, die das ganze Gesichtsfeld des Mikroskopes einnehmen und daher zur Beobachtung der Interferenzfiguren im konvergenten Licht geeignet sind.

Im Verlaufe der Untersuchung von dickeren Schichten von p-Acetoxybenzalazin zeigte sich, daß in einzelnen doppelbrechenden Gebieten an der unteren Küvettenwand eine dünne Schicht der amorphen Phase anliegt²⁾. Da die Grenzfläche nematisch—amorph eine *P*-Fläche bildet, während die obere Wand eine *N*-Fläche ist, muß man annehmen, daß in diesen Gebieten, die als *P-N*-Gebiete bezeichnet werden sollen, ϑ , der Winkel zwischen Molekülachse und Plattennormale, beim Fortschreiten von der unteren zur oberen Grenzfläche stetig von $\pi/2$ bis auf Null abnimmt (vgl. Fig. 2). Diese Hypothese konnte durch die Beobachtungen im konvergenten Licht bestätigt werden, wie im folgenden noch eingehend dargestellt werden wird. Die anderen doppelbrechenden Gebiete besitzen die schon in der Einleitung beschriebene, von Zocher angenommene Struktur, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist, sie sollen als *N-P-N*-Gebiete bezeichnet werden, denn sie bestehen aus zwei symmetrisch zusammengesetzten *P-N*-Gebieten mit der Schichtmitte als Spiegelebene. Auch bei den *N-P-N*-Gebieten ist die angenommene Struktur in Übereinstimmung mit den beobachteten Interferenzfiguren.

5. Die mathematische Darstellung der Struktur der *P-N*-Gebiete mit Hilfe der Oseenschen Gleichungen. Nach Oseen³⁾ ist die Energiedichte einer nematischen Struktur durch die Gleichung bestimmt

$$E = K_{11} [\mathbf{t} \cdot \text{rot } \mathbf{t}]^2 + K_{22} [\text{div } \mathbf{t}]^2 + K_{33} [(\mathbf{t} \nabla) \cdot \mathbf{t}]^2, \quad (1)$$

¹⁾ Hier sei noch der p-Äthoxybenzalamino- α -methylzimtsäureäthylester erwähnt. — ²⁾ Diese Erscheinung ist dadurch verursacht, daß in den dicken, nur von der Unterseite geheizten Schichten ein Temperaturgefälle auftritt. —

³⁾ C. W. Oseen, Die anisotropen Flüssigkeiten, Berlin 1929, S. 30.

worin K_{11} , K_{22} , K_{33} drei Materialkonstanten¹⁾ sind, und \mathbf{t} ein Einheitsvektor ist, der die Richtung der Längsachse der Moleküle angibt. Die Gleichgewichtsbedingung erhält man dann, indem man die Variation von Gleichung (1) bildet und gleich Null setzt²⁾. Bei der mathematischen Behandlung der P - N - und N - P - N -Strukturen müssen ihre Randgebiete in der Nähe der Grenzlinien unberücksichtigt bleiben, da die Randbedingungen nicht genau bekannt sind. Diejenigen Teile der doppelbrechenden Gebiete, die den Grenzlinien nicht allzu nahe liegen, sind „einfach deformierte

¹⁾ Zwischen den Oseenschen Konstanten und den von Zocher eingeführten Elastizitätsmoduln für Torsion, Divergenz und Flexion bestehen die Beziehungen $2 K_{11} = K_t$, $2 K_{22} = K_d$, $2 K_{33} = K_f$. — ²⁾ Die allgemeine Form der Gleichgewichtsbedingung lautet in der von J. Radon (Abh. aus d. Math. Sem. d. Hansischen Univ. **12**, 70, 1937) verwendeten Darstellungsweise

$$\begin{aligned} & -K_{11} \mathbf{b} \cdot \text{grad} (\mathbf{t} \cdot \text{rot} \mathbf{t}) \\ & + K_{22} \mathbf{n} \cdot \text{grad} \text{div} \mathbf{t} \\ & + K_{33} (\mathbf{t} \cdot \text{grad} \kappa - \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} [\mathbf{n} \cdot \text{grad} (\mathbf{t} \cdot \text{rot} \mathbf{t}) - 2 \kappa (\mathbf{t} \cdot \text{rot} \mathbf{t})] \\ + K_{22} \mathbf{b} \cdot \text{grad} \text{div} \mathbf{t} \\ + K_{33} (\tau - \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}) = 0. \end{aligned}$$

Das \mathbf{t} -Feld, das die Struktur darstellt, wird hier als Kurvenschar aufgefaßt, deren Richtung im betrachteten Punkt (Einheitsvektor \mathbf{t}) die Molekülrichtung angibt. \mathbf{n} ist der Einheitsvektor der zugehörigen Kurvennormalen, \mathbf{b} der Einheitsvektor in Richtung der Binormalen. κ ist die Krümmung der betrachteten Scharkurve im betreffenden Punkt und τ ihre Torsion. Das Vektorenfeld \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} bestimmt die Differentialinvarianten erster Ordnung des \mathbf{t} -Feldes. (Näheres vgl. bei Radon, a. a. O.).

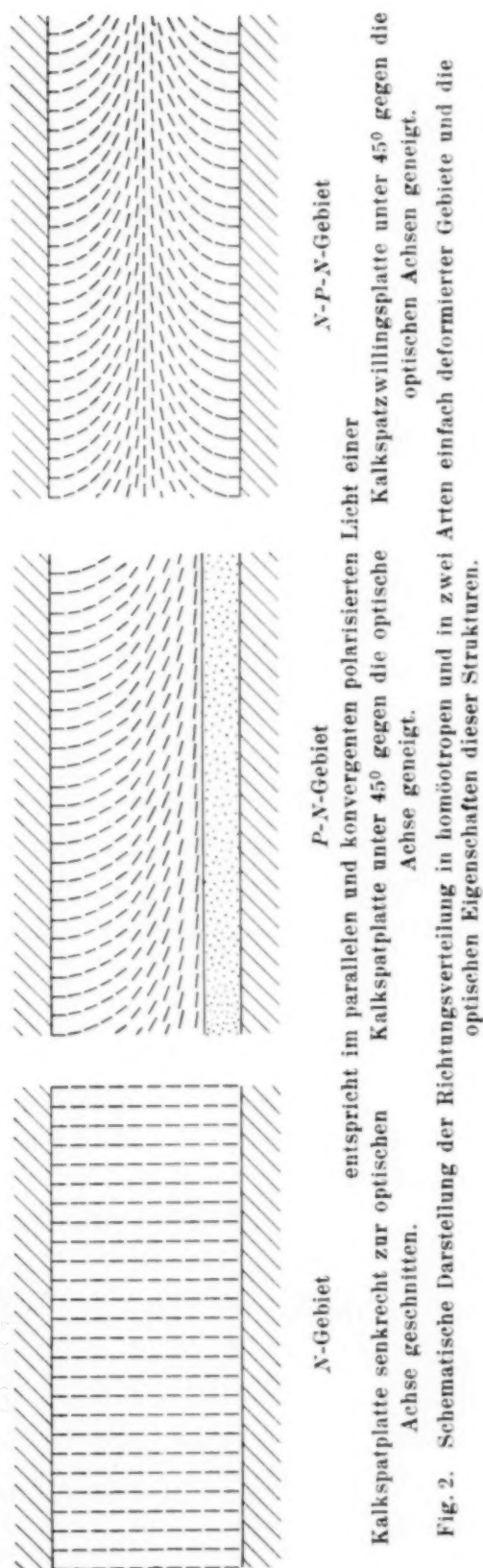


Fig. 2. Schematische Darstellung der Richtungsverteilung in homöotropen und in zwei Arten einfach deformierter Gebiete und die optischen Eigenschaften dieser Strukturen.

Strukturen“, denn innerhalb großer Bereiche trifft mit guter Annäherung die Voraussetzung zu, daß alle Moleküle einer Ebene parallel liegen (vgl. Fig. 1), und daß der Winkel ϑ zwischen Molekülrichtung und Plattennormale nur vom Abstand von der Wand abhängt. Legt man in ein solches Gebiet ein orthogonales Koordinatensystem mit der z -Achse in Richtung der Plattennormale und mit der x - z -Ebene parallel der Molekülrichtung, dann hat der Richtungsvektor \mathbf{t} nur die zwei Komponenten

$$t_x = \sin \vartheta, \quad t_z = \cos \vartheta$$

und ist von x und y unabhängig:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial y} = 0.$$

Die Differentialgleichung dieses einfachen Deformationszustandes hat die Form

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} (\sin^2 \vartheta K_{22} + \cos^2 \vartheta K_{33}) + \left(\frac{d \vartheta}{dz} \right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (K_{22} - K_{33}) = 0. \quad (2)$$

Da für die Zwecke dieser Untersuchung eine große Genauigkeit nicht erforderlich ist, kann man sich mit der Annäherungslösung begnügen, die man in sehr einfacher Weise erhält, wenn man wie Oseen in einem ähnlichen Falle¹⁾ $K_{22} = K_{33}$ setzt²⁾. Gleichung (2) geht dann in die Beziehung über

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} = 0,$$

und man erhält unter Berücksichtigung der Randbedingungen an der Glasplatte

$$z = 0, \quad \vartheta = 0$$

und an der Grenzfläche nematisch-amorph

$$z = d, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

¹⁾ C. W. Oseen, a. a. O., S. 43. — ²⁾ Bisher haben nur bei p-Azoxyanisol E. Burkert (Dissertation Prag 1936) und V. Zwetkoff (a. a. O.) die Werte aller drei Elastizitätsmoduln bestimmt. Danach verhält sich K_f zu K_d ungefähr wie 2 : 1.

für die Struktur der *P-N*-Gebiete die Gleichung

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \frac{z}{d}. \quad (3)$$

Hier bedeutet d die Dicke der nematischen Schicht und z den Abstand von der oberen Küvettenwand, an der die nematische Substanz anliegt. Fig. 2 zeigt die durch Gleichung (3) dargestellte Richtungsverteilung sowie auch die Richtungsverteilung eines *N-P-N*-Gebietes, die durch symmetrische Zusammensetzung zweier *P-N*-Gebiete konstruiert wurde.

Auf die Tatsache, daß die *N-P-N*-Gebiete von benachbarten *N*-Gebieten stets durch scharfe Grenzen getrennt sind, ist schon mehrmals hingewiesen worden. Schon die genauere mikroskopische Untersuchung zeigt, daß es sich hier nicht um Grenzflächen handelt, die nur in der Projektion als Linien erscheinen, sondern um Unstetigkeitslinien. Bei starker Vergrößerung ist nämlich eine scharfe Grenze nur bei Einstellung auf die Mitte der Schicht zu erkennen, bei Einstellung auf die oberste oder unterste Randschicht erscheint die Grenzlinie unscharf. Mit der Struktur solcher Unstetigkeitslinien, denen bekanntlich die nematischen Substanzen ihren Namen verdanken, haben sich u. a. Friedel (a. a. O.) und Zocher¹⁾ beschäftigt. Den beschriebenen Grenzlinien wäre im Sinne der von Friedel eingeführten Bezeichnungsweise das Symbol $+1$ oder -1 zuzuordnen. Bei einem vollen Umlauf um einen solchen Faden ändert sich die Richtung der Moleküle in seiner Umgebung um 180° .

6. Normalgebiete im konvergenten Licht. Homöotrope Gebiete nematischer Schichten verhalten sich, wie schon erwähnt, auch im konvergenten polarisierten Licht wie senkrecht zur Achse geschnittene Platten einachsiger Kristalle; sie liefern bei gekreuzten Nicols das dunkle Kreuz mit Ringen, die in weißem Licht farbig, in monochromatischem Licht dunkel sind. Fig. 3 zeigt die Interferenzfiguren homöotroper Gebiete von zwei Schichten von *p*-Acetoxybenzalazin mit Schichtdicken von 0,45 mm (Aufnahme a) und 1,00 mm (Aufnahme b). Die Aufnahmen wurden auf Agfa-Isochromplatten unter Verwendung eines Tartrazin-Eosinfilters hergestellt, das nur einen schmalen Spektralbereich mit dem Schwerpunkt bei 600 m μ durchläßt. Die Apertur des Objektivs war $\sin 12^\circ$. Mit steigender Schichtdicke werden die Strukturen und damit die Interferenzfiguren immer empfindlicher

¹⁾ H. Zocher u. V. Birstein, a. a. O.

gegen Erschütterungen; bei 1 mm-Schichten führen die Interferenzfiguren auf den leisesten Anstoß hin lebhaftere Schwankungen aus. Bei Aufnahmen an dickeren Schichten mußten die Belichtungszeiten daher möglichst kurz gewählt werden, so daß die Negative immer unterbelichtet waren¹⁾.

Aus Fig. 3 ist erkennbar, daß bei gleichbleibender Apertur die Zahl der Ringe der Schichtdicke proportional ist (für $d = 0,45$ mm drei Ringe, für $d = 1,00$ mm sechs Ringe). Auch bei allen anderen untersuchten Gebieten, bei den deformierten ebenso wie bei den homöotropen Strukturen, war die Zahl der Interferenzlinien der Schichtdicke proportional. Aus

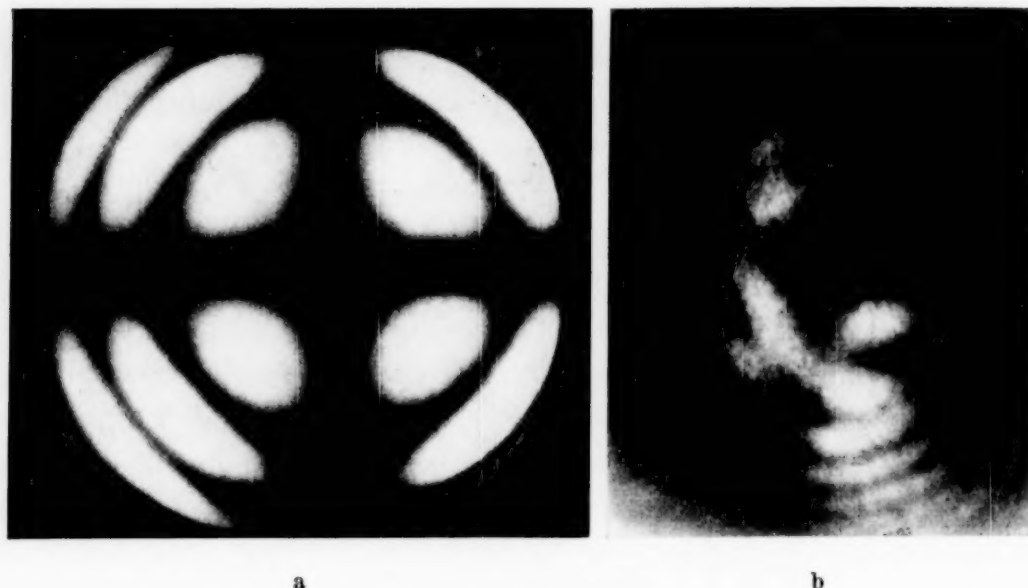


Fig. 3. Interferenzfiguren im konvergenten polarisierten Licht von homöotropen Gebieten in zwei nematischen Schichten von p-Acetoxybenzalazin. Apertur 0,22, annähernd monochromatisches Licht $\lambda = 600 m\mu$. Schichtdicke bei Aufnahme a 0,45 mm, bei Aufnahme b 1,00 mm.

diesem Verhalten kann man schließen, daß diese Strukturen die ganze Schichtdicke zwischen den beiden Grenzflächen einnehmen; die Annahme einer statistisch isotropen Mittelschicht würde die ganz unwahrscheinliche Hypothese erfordern, daß die Dicke der orientierten Randschicht der gesamten Schichtdicke genau proportional ist. Die Unhaltbarkeit dieser Hypothese kann überdies an Hand des vorliegenden Versuchsmaterials nachgewiesen werden, indem man aus den Interferenzfiguren homöotroper Gebiete (z. B. aus den Aufnahmen Fig. 3) die Doppelbrechung berechnet

¹⁾ Mit steigender Schichtdicke wächst übrigens auch die störende Wirkung von Staubeilchen, so daß es immer schwieriger wird, genügend große, völlig unverzerrte Gebiete zu erhalten.

und sie mit den von Freédericksz und Zolina¹⁾ erhaltenen Werten vergleicht, die durch Untersuchung nematischer Schichten in starken magnetischen Feldern bestimmt wurden.

Die Auswertung der Interferenzfiguren geschah mit Hilfe der bekannten Formel²⁾

$$\sin^2 i_h = h \frac{2 n_e^2 n_o \lambda}{(n_e^2 - n_o^2) d} \quad (4)$$

für die Kurven gleichen Gangunterschiedes bei einachsigen, senkrecht zur Achse geschnittenen Kristallplatten. In Gleichung (4) ist $\sin i_h$ der Radius des Ringes mit der Ordnungszahl h . Bei der Aufnahme der Interferenzfiguren in Fig. 3 wurden die Präparate bei einer Temperatur gehalten, die etwas über ihrem Kristallisationspunkt lag, also bei ungefähr 160° ³⁾. Für n_o wurde der Wert 1,52 eingesetzt, der bei der gleichen Temperatur nach dem in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren bestimmt worden war. Die Werte für Schichtdicke und Wellenlänge waren für Aufnahme 3a, wie schon erwähnt, $d = 0,45$ mm und $\lambda = 600$ m μ ; der Radius des dritten Ringes war $\sin i_3 = 0,220 = \sin 12^\circ 40'$. Unter Benutzung dieser Zahlen erhält man aus Gleichung (4) für die Doppelbrechung des p-Acetoxybenzalazins bei ungefähr 160° ⁴⁾ den Wert $n_e - n_o = 0,24$.

Da bei den Versuchen von Freédericksz und Zolina das Magnetfeld zu den Glasplatten, zwischen denen sich die Substanz befand, parallel gerichtet war, konnte in Schichten von p-Acetoxybenzalazin, das sich ja an Glasplatten normal zu diesen einstellt, keine vollkommen einheitliche Orientierung erreicht werden. Immerhin war bei den höchsten angewendeten Feldstärken — über 20000 Gauß — der überwiegende Teil der Schicht

¹⁾ V. Freédericksz u. V. Zolina, ZS. f. Kristallogr. **79**, 255, 1931. —

²⁾ Vgl. z. B. F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik, S. 241, Leipzig-Berlin 1906. — ³⁾ Der Umwandlungspunkt fest-nematisch lag bei 185° , der Umwandlungspunkt nematisch-amorph bei 193° ; beim Abkühlen trat infolge Unterkühlung erst bei ungefähr 160° Kristallisation ein. — ⁴⁾ Von einer genaueren Bestimmung der Versuchstemperatur wurde abgesehen, da nicht bekannt ist, mit welcher Genauigkeit die physikalischen Eigenschaften verschiedener Präparate bei gleicher absoluter Temperatur übereinstimmen. Da die Umwandlungspunkte verschiedener Präparate voneinander abweichen, wäre es möglich, daß man zu Vergleichszwecken die Temperaturskala durch die Umwandlungspunkte festlegen muß (vgl. z. B. A. van Wyk, Ann. d. Phys. (5) **3**, 890, 1929). Freédericksz und Zolina machen übrigens keine Angaben über die Umwandlungspunkte ihres Präparates von p-Acetoxybenzalazin, es war aber bis unter 150° unterkühlbar. Beim Tropper-schen Präparat lag der Umwandlungspunkt nematisch-amorph bei 188° .

praktisch vollkommen parallel dem Magnetfelde orientiert. Unter diesen Versuchsbedingungen ergaben sich für die Doppelbrechung die Werte 0,240 bei 159° und 0,235 bei 161°. Mit Rücksicht auf die gute Übereinstimmung der Messungen an den spontan orientierten homöotropen Gebieten und an magnetisch orientierten nematischen Schichten kann man wohl die Annahmen der Schwarmtheorie als endgültig widerlegt ansehen, daß die Temperaturbewegung der Schwärme die spontane Orientierung nematischer Schichten verhindert, und daß nur dünne Randschichten durch den Einfluß der Wände orientiert sind.

In diesem Zusammenhange möge die Frage der thermischen Schwankungen der Moleküle bzw. größerer Molekülkomplexe kurz gestreift werden. Die homöotropen Gebiete, von denen die Aufnahmen in Fig. 3 stammen, zeigten im parallelen polarisierten Licht das durch die Temperaturbewegung hervorgerufene Flimmern sehr deutlich¹⁾, ebenso wie auch alle anderen nematischen Schichten mit Ausnahme der auf Zimmertemperatur unterkühlten Schichten des Anisalaminonaphthalinazobenzoesäureäthylesters. Aus den oben geschilderten Eigenschaften der Interferenzfiguren geht hervor, daß es sich bei diesen thermischen Schwankungen um Pendelbewegungen handelt, deren Amplitude relativ gering ist, und deren — zeitlich unveränderliche — Mittellage die durch die Struktur für den betrachteten Ort vorgeschriebene Molekülrichtung ist. Bei Strukturbetrachtungen kann daher der Einfluß der thermischen Schwankungen in weitgehender Näherung vernachlässigt werden.

7. *Deformierte Gebiete im konvergenten polarisierten Licht.* Man kann leicht berechnen, was für Kurven gleichen Gangunterschiedes *P-N*-Strukturen liefern sollten, wie sie durch Gleichung (3) bzw. Fig. 2 dargestellt sind. Es ist daher möglich, durch Vergleich der theoretisch abgeleiteten Kurven mit den beobachteten Interferenzfiguren zu prüfen, ob die doppelbrechenden Gebiete nematischer Schichten in Wirklichkeit die oben abgeleiteten Strukturen besitzen. Die Beobachtung der Interferenzfiguren von deformierten Gebieten ist allerdings schon wegen ihrer geringeren Beständigkeit (besonders bei *P-N*-Gebieten) schwieriger als bei *N*-Gebieten. Außerdem sind die deformierten Gebiete auch noch wesentlich empfindlicher gegen Erschütterungen als die Normalgebiete. An nicht unterkühlten

¹⁾ Das Funkeln erscheint übrigens bei gekreuzten Nicols etwas auffallender, wenn das Präparat nicht ganz scharf eingestellt ist; das dürfte davon herrühren, daß der Durchmesser der hellen bzw. dunklen Flecken mit der Entfernung von der Scharfeinstellung wächst.

nematischen Schichten konnten die Interferenzfiguren deformierter Gebiete daher wohl beobachtet, aber wegen ihrer starken Schwankungen weder photographiert noch ausgemessen werden. Bei den stark unterkühlten Schichten des Azofarbstoffes wurden die Interferenzfiguren von *N-P-N*-Gebieten und anderen deformierten Gebieten photographiert; *P-N*-Gebiete kommen bei unterkühlten Schichten naturgemäß nicht vor.

An dicken Schichten von *p*-Acetoxybenzalazin konnten mehrmals gut ausgebildete Interferenzfiguren von *P-N*-Gebieten beobachtet werden. Sie zeigen das gleiche Aussehen wie die Interferenzfiguren von Platten

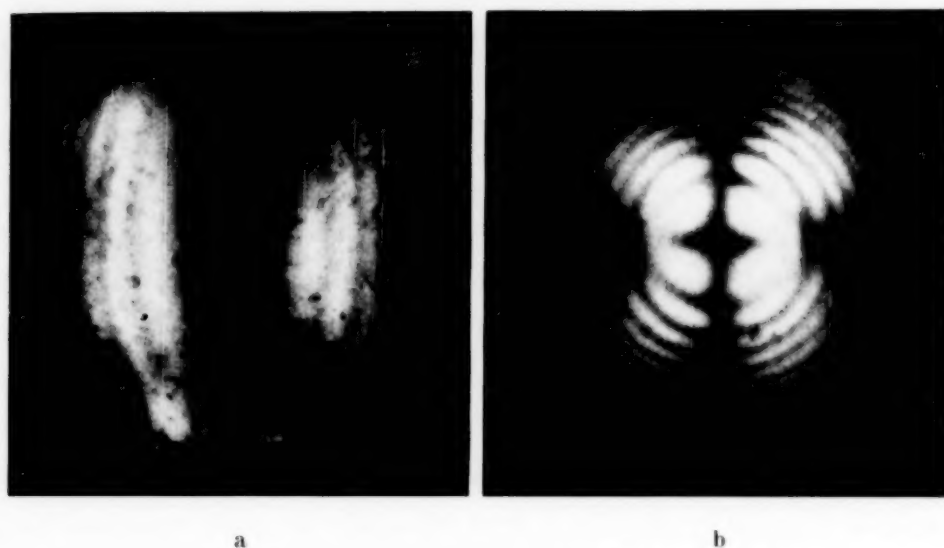


Fig. 4. Interferenzfiguren im konvergenten polarisierten Licht der beiden Gebiete von Fig. 1. Aufnahme a doppelbrechendes Gebiet (*N-P-N*-Gebiet), Aufnahme b homöotropes Gebiet (*N*-Gebiet). Schichtdicke 38μ , Apertur 0,82, $\lambda = 577 \text{ m}\mu$.

eines einachsigen Kristalls, die unter 45° zur Achse geschnitten sind (vgl. z. B. Pockels, a. a. O., Tafel I, Fig. 3). Dementsprechend liefern die *N-P-N*-Gebiete die Interferenzfiguren eines Zwillings aus zwei derartigen Platten (vgl. z. B. Pockels a. a. O. Tafel III, Fig. 1). Fig. 4a zeigt eine Aufnahme im konvergenten Licht¹⁾ von einem *N-P-N*-Gebiet in einer 0,038 mm dicken Schicht von Anisalaminonaphthalinazobenzoesäureäthylester bei einer Apertur von $\sin 55^\circ 30' = 0,82$. Zu Vergleichszwecken ist auch eine Aufnahme an einem homöotropen Gebiet der gleichen Schicht wiedergegeben (Fig. 4b).

Manche doppelbrechenden Gebiete liefern auch die Interferenzfiguren von Zwillingslamellen mit geringerer Neigung zur Achse. Hier handelt

¹⁾ Als Lichtquelle diente hier eine Quecksilberlampe mit vorgeschaltetem Zeißschen Filter für die gelbe Hg-Linie.

es sich offenbar um N -Gebiete die durch Strömung der Substanz schwach deformiert sind. Zum Unterschied von den N - P - N -Gebieten sind hier die Moleküle in der Mitte der Schicht senkrecht zu den Wänden orientiert, ϑ nimmt also von der Wand gegen die Schichtmitte hin zunächst zu, durchschreitet ein Maximum, dessen Wert von der Stärke der Deformation abhängt, und sinkt dann wieder bis auf Null. Derartige Interferenzfiguren, die besonders gut bei unterkühlten Schichten zu beobachten sind, hat schon Vorländer¹⁾ beschrieben; er führte ihr Auftreten nicht auf kontinuierliche Deformation, sondern auf Knickung von homöotropen Strukturen zurück.

Die Ableitung der Kurven gleichen Gangunterschiedes wurde unter Verwendung der Pockelsschen Gleichungen²⁾ für einachsige Kristallplatten durchgeführt. Danach sind die Kurven gleichen Gangunterschiedes für optisch einachsige Kristallplatten durch die Formel bestimmt

$$\frac{\delta \cdot \lambda}{n_e - n_o} = \frac{d}{\cos r} \{ \sin^2 \vartheta + \sin^2 r (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cos^2 \zeta) - \sin r \cos r \sin 2 \vartheta \sin \zeta \}. \quad (5)$$

Hier ist δ der Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und außerordentlichen Lichtstrahl, ζ das Azimut des betrachteten Lichtstrahles und r der Winkel, den der Lichtstrahl mit der Mikroskopachse einschließt. ϑ ist die Neigung der optischen Achse des Kristalls zur Plattennormalen.

Bei der Betrachtung von P - N -Gebieten, in denen ϑ ja nicht konstant, sondern nach Gleichung (3) dem Abstand von der Wand proportional ist, muß man an Stelle von Gleichung (5) die Gleichung ansetzen

$$\frac{\delta \cdot \lambda}{n_e - n_o} = \frac{1}{\cos r} \int_0^d \{ \sin^2 \vartheta + \sin^2 r (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \cos^2 \zeta) - \sin r \cos r \sin 2 \vartheta \sin \zeta \} dz. \quad (5')$$

Wenn man hier z entsprechend Gleichung (3) durch ϑ ausdrückt und dann integriert, erhält man die Beziehung

$$\frac{\delta \cdot \lambda}{n_e - n_o} = \frac{d}{2 \cos r} \left\{ 1 + \sin^2 r \sin^2 \zeta - \frac{4}{\pi} \sin r \cos r \sin \zeta \right\}. \quad (6')$$

¹⁾ D. Vorländer, Ber. d. D. Chem. Ges. **41**, 2051, 1905. — ²⁾ F. Pockels, a. a. O., S. 241.

Gleichung (6') stellt die Kurven gleichen Gangunterschiedes von P - N -Gebieten dar; sie unterscheidet sich nur wenig von der entsprechenden Formel für Kristallplatten mit einer Neigung von 45° zur Achse

$$\frac{\delta \cdot \lambda}{n_e - n_o} = \frac{d}{2 \cos r} \{1 + \sin^2 r \sin^2 \zeta - 2 \sin r \cos r \sin \zeta\}, \quad (6)$$

die man erhält, wenn man in Gleichung (5) $\vartheta = 45^\circ$ setzt.

Da die experimentell beobachteten Interferenzfiguren von P - N -Gebieten, wie schon erwähnt, tatsächlich den Interferenzfiguren von Kalkspatplatten mit 45° Neigung zur Achse sehr ähnlich sind, und auch die N - P - N -Gebiete im konvergenten polarisierten Licht die gleichen Bilder liefern wie Kalkspatzwillingsplatten mit 45° Neigung zu den Achsen, muß man annehmen, daß Gleichung (3) und Fig. 2 die Struktur dieser zwei Arten einfach deformierter Gebiete mit guter Annäherung darstellen. Ein quantitativer Vergleich der Interferenzfiguren mit den abgeleiteten Gleichungen wäre sehr erwünscht, dazu müßte man aber nicht nur die Interferenzfiguren von P - N -Gebieten genau ausmessen können, sondern auch das Verhältnis der Elastizitätsmoduln der untersuchten nematischen Substanz kennen und in die Differentialgleichung der Struktur einsetzen.

8. *Der Gangunterschied parallelen, senkrecht einfallenden Lichtes in N - P - N -Gebieten; Vergleich zwischen Experiment und Theorie.* Wenn man weißes paralleles Licht, das bei gekreuzten Nicols durch eine doppelbrechende Schicht durchgegangen ist, spektral zerlegt, beobachtet man im Spektrum dunkle Interferenzlinien. Der Abstand dieser Linien hängt vom Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Lichtstrahl ab, den die doppelbrechende Schicht bewirkt. Bei Kristallplatten, die parallel zur optischen Achse geschnitten sind, ist der Gangunterschied δ bei senkrechtem Durchgang des Lichtes

$$\delta = d \frac{n_e - n_o}{\lambda} \quad (7)$$

Die Gangdifferenz, die einer bestimmten Interferenzlinie von der Wellenlänge λ_1 entspricht, sei δ_1 . Die benachbarte Interferenzlinie mit der Wellenlänge λ_2 hat dann die Gangdifferenz $\delta_2 = \delta_1 + 1$. Durch Einsetzen dieser

¹⁾ Gleichung (7) erhält man aus Gleichung (5), wenn man $\vartheta = 0$ und $r = 90^\circ$ setzt.

Wertepaare in Gleichung (7) und Subtraktion des einen Ausdruckes vom anderen findet man dann die Beziehung

$$d(n_e - n_o) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 1. \quad (8)$$

Wenn man in Gleichung (6') $r = 90^\circ$ setzt, ergibt sich, daß die Gangdifferenz in einem P - N -Gebiet nur halb so groß ist wie in einer parallel zur Achse geschnittenen Kristallplatte, so daß hier an Stelle von Gleichung (7) bzw. Gleichung (8) die Formeln treten

$$\delta = \frac{d(n_e - n_o)}{2\lambda} \quad (7')$$

und

$$\frac{d}{2} (n_e - n_o) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 1. \quad (8')$$

An verschiedenen P - N - und N - P - N -Gebieten in dicken Schichten von p -Acetoxybenzalazin wurde der Abstand der Interferenzlinien im Spektrum bestimmt und in Übereinstimmung mit Gleichung (8') gefunden. Zu diesen Messungen wurde ein Taschenspektroskop verwendet, und ihre Genauigkeit war gering. An einer Schicht von 1-Anisalaminonaphthalin-4-azobenzoessäureäthylester wurden auch genaue Messungen mit Hilfe eines Monochromators durchgeführt. Da bei dieser Substanz, die nur den roten und gelben Teil des Spektrums durchläßt, die Doppelbrechung sehr

stark von der Wellenlänge abhängt, muß man an Stelle von Gleichung (8') die Formel verwenden

$$\frac{d}{2} \left[\frac{(n_e - n_o)_1}{\lambda_1} - \frac{(n_e - n_o)_2}{\lambda_2} \right] = 1. \quad (9)$$

Der Brechungsindex des ordentlichen Lichtstrahles und die Doppelbrechung

wurde für Natriumlicht, für die gelbe Quecksilberlinie und im roten Spektralgebiet (unter Verwendung eines Filters mit dem Schwerpunkt bei 720 $m\mu$) mit Hilfe der oben beschriebenen Methoden bestimmt. Bei einer Schichtdicke von 0,012 mm lagen zwei benachbarte Interferenzlinien bei 624 und 592 $m\mu$. Durch Interpolation in Tabelle 1 findet man für diese Wellenlängen die Werte der Doppelbrechung 0,72 bzw. 0,78. Setzt man diese Werte in Gleichung (9) ein, so erhält man

$$6 \left(\frac{0,78}{0,592} - \frac{0,72}{0,624} \right) = 0,99.$$

Tabelle 1.

λ in $m\mu$	n_o	$n_e - n_o$	n_e
577	1,62	0,82	2,44
590	1,61	0,79	2,40
720	1,58	0,51	2,09

Auch bei diesen Versuchen stimmt also die Theorie mit dem Experiment gut überein, und sie bilden daher weiteres Beweismaterial für die Richtigkeit der Anschauungen über die Struktur der doppelbrechenden Gebiete gewisser nematischer Schichten, wie sie in Abschnitt 4 und 5 dieser Untersuchung dargestellt wurden.

Zusammenfassung.

1. Das Aussehen nematischer Schichten im parallelen polarisierten Licht wird beschrieben, wobei verschiedene einfach deformierte Gebiete besondere Berücksichtigung finden, in welchen das Azimut der Moleküle konstant ist und die Neigung der Moleküle gegenüber der Plattennormalen nur vom Abstand von der Wand abhängt. Die Bezeichnung „einfach deformiert“ wird für alle Strukturen verwendet, in welchen die Molekülorichtung nur längs einer Koordinate variiert.

2. Es werden photographische Aufnahmen der Interferenzfiguren im konvergenten polarisierten Licht von homöotropen Gebieten in nematischen Schichten von 0,45 und 1,00 mm Dicke wiedergegeben, und durch Auswertung dieser Figuren wird der Beweis erbracht, daß die zu den Wänden normale Orientierung der Moleküle sich durch die ganze Tiefe der Schicht von einer Wand bis zur anderen erstreckt. Die thermischen Schwankungen können bei Strukturbetrachtungen vernachlässigt werden.

3. Für zwei Arten von einfach deformierten Gebieten wird mit Hilfe der Oseenschen Differentialgleichungen die Struktur mathematisch dargestellt. In den als *P-N*-Gebiete bezeichneten Strukturen, in welchen die Moleküle an der einen Grenzfläche (nematische Substanz — Glas) normal zur Wand, an der anderen Grenzfläche (nematische Phase — amorphe Phase) parallel zu dieser orientiert sind, ist danach der Winkel zwischen Molekülachse und Plattennormale einfach proportional zum Abstand von der Grenzfläche. Die *N-P-N*-Gebiete, in welchen die Moleküle in beiden Randschichten senkrecht zu den Wänden, in der Mitte der Schicht dagegen parallel zu den Wänden orientiert sind, können als zwei symmetrisch zusammengesetzte *P-N*-Strukturen aufgefaßt werden.

4. Für *P-N*-Gebiete werden die Kurven gleichen Gangunterschiedes aus der Richtungsverteilung der Moleküle abgeleitet. In Übereinstimmung mit dem Experiment liefert die Ableitung eine Formel, die derjenigen

für die Kurven gleichen Gangunterschiedes von einachsigen Kristallplatten mit einer Neigung von 45^0 zur Achse sehr ähnlich ist. Dementsprechend liefern *N-P-N*-Gebiete im konvergenten polarisierten Licht die gleichen Interferenzfiguren wie Kalkspatzwillingsplatten mit 45^0 Neigung zu den Achsen.

5. Durch spektrale Zerlegung des bei gekreuzten Nicols durch *P-N*- und *N-P-N*-Gebiete senkrecht hindurchgegangenen Lichtes und Bestimmung der Wellenlänge der Interferenzstreifen im Spektrum wird eine weitere Bestätigung der Struktur dieser Gebiete erbracht.

Prag, Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie der Deutschen Technischen Hochschule, Juli 1938.

Druckeffekt in der Magnesiumhydridbande bei λ 2590 Å.

Von Arnold Guntseh in Stockholm.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 4. Juni 1938.)

Es wurde die Magnesiumhydridbande bei $\lambda = 2590$ Å im Druckbogen aufgenommen, wobei in Emission etwa doppelt soviel Linien beobachtet wurden, als früher in Absorption erhalten worden waren. Die Bande erscheint nur bei höheren Drucken und zwar von etwa 400 mm an. Die Rotationskonstante F gibt der Bande ihr charakteristisches Aussehen.

Früher hat Grundström¹⁾ ²⁾ über eine bei $\lambda = 2590$ Å gelegene Bande des Magnesiumhydrids berichtet. Diese Bande war in Absorption mit Hilfe eines Vakuumofens erhalten worden. Die von Grundström ausgeführte Analyse ergab, daß die Bande einem $^2\Sigma - ^2\Sigma$ -Übergang entsprach, wobei der Endzustand derselbe war wie für die grünen Magnesiumhydridbanden. Bei meinen Untersuchungen über das Bandenspektrum des Magnesiumhydrids hat es sich jedoch gezeigt, daß diese Bande bei Aufnahmen in demselben Gebiet weder in der Emission eines Geißler-Rohrs noch in der eines Bogens erhalten werden konnte. Diese Aufnahmen waren aber alle bei einem Wasserstoffdruck von nur einigen Millimetern Quecksilber ausgeführt worden. Da also ein so eigentümliches Verhältnis vorhanden war, daß die Bande bei niedrigen Drucken nur in Absorption auftrat, erschien es wichtig, eine Untersuchung der Bande in Emission bei höheren Drucken auszuführen.

Die Aufnahmen wurden mit einem großen Quarzspektrographen gemacht. Als Lichtquelle diente ein Druckbogen, der von einem 3000 Volt Gleichstromgenerator gespeist wurde. Die günstigste Stromstärke war 0,8 Amp. War nämlich die Stromstärke höher, so entstand bei den hohen Drucken ein kontinuierliches Spektrum, das sich dem Bandenspektrum überlagerte. Der Wasserstoffdruck betrug 3 Atm. Bei allen diesen Aufnahmen hatte die Bande das aus der Figur ersichtliche Aussehen. Charakteristisch für diese Bande ist, daß sich der R -Zweig bei $\lambda = 2590$ Å zu einer Kante zusammenzieht, sich aber dann nicht umkehrt, sondern sich auf der anderen Seite der Kante wieder forsetzt. Dadurch entsteht die aus der Figur zu ersiehende Anhäufung von 10 Bandenlinien. Der P -Zweig

¹⁾ B. Grundström, Nature **137**, 108, 1936. — ²⁾ B. Grundström, Diss. Stockholm, 1936.

zieht sich auch zu einer Kante zusammen, die jedoch nicht ganz ausgebildet ist. In der Tabelle sind die Bandenlinien eingetragen. Die daraus berechneten Konstanten sind für den neuen Anfangszustand:

$$B = 5,44_8 \text{ cm}^{-1},$$

$$D = -2,71 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1},$$

$$F = 8,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1},$$

$$\nu_0 = 38485 \text{ cm}^{-1}.$$

Diese Konstanten stimmen gut mit den von Grundström¹⁾ gegebenen überein. Da er aber die Bande in Absorption nur bis *R* (16) und *P* (18) erhalten hat, konnte er die Rotationskonstante *F* nicht berechnen. Jedoch gibt

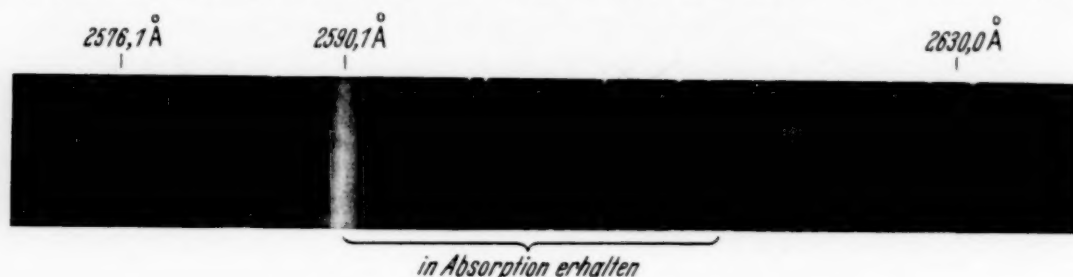


Fig. 1. Die Bande bei hohem Druck.

er an, daß die letzten Bandenlinien etwas aus dem regelmäßigen Linienverlauf herausfallen. Dies ist dem Einfluß des *F*-Terms zuzuschreiben, der der Bande ihr charakteristisches Aussehen verleiht. Berücksichtigt man nur die *B*-Werte, so folgt aus der gewöhnlichen zuerst von Heurlinger angegebenen Formel $\left(K_{\text{Kopf}} = -\frac{B' + B''}{2(B' - B'')}\right)$, daß der Bandenkopf etwa bei *R* (18), also mitten in der Linienhäufung, liegen sollte. Der *F*-Term ist aber groß und positiv, so daß diejenigen Bandenlinien, bei denen sich der *F*-Term bemerkbar macht, eine Verschiebung nach Violett hin erfahren. Die Violettverschiebung ist so groß, daß die *R*-Linien bei dem Bandenkopf nicht umkehren, sondern sich weiter fortsetzen. Beim *P*-Zweig macht sich diese Violettverschiebung in der Weise bemerkbar, daß die genannten Bandenlinien sich nicht, wie zu erwarten war, in regelmäßiger Weise immer mehr voneinander entfernen, sondern sich zu einer Kante zusammenziehen, wie schon oben bemerkt wurde. Kürzlich hat auch Grundström²⁾ ähnliche Verhältnisse bei InH beobachtet.

¹⁾ Was den *D*-Wert betrifft ist zu bemerken, daß sich in der Arbeit von Grundström ein Druckfehler eingeschlichen hat, indem der *D*-Wert mit $2,58 \cdot 10^{-5}$ statt mit $2,58 \cdot 10^{-4}$ angegeben wird. Dasselbe gilt für den ν_0 -Wert, wo statt 38495 cm^{-1} zu lesen ist 38485 cm^{-1} . — ²⁾ B. Grundström, Nature **141**, 555, 1938.

Tabelle 1. Die $^2\Sigma^* - ^2\Sigma$ -Bande bei λ 2590 Å.

K	$R(K)$	$P(K)$	K	$R(K)$	$P(K)$
1	38 506,2	38 473,5	19	*	38 185,5
2	517,4	459,3	20	*	167,5
3	522,6	448,7	21	*	149,6
4	532,7	434,0	22	*	132,1
5	542,2	423,1	23	38 606,4	116,1
6	548,1	407,5	24	612,1	099,7
7	554,8	392,7	25	617,8	086,2
8	560,7	377,1	26	624,1	073,2
9	566,4	361,1	27	631,4	061,6
10	571,7	345,1	28	641,0	049,8
11	575,0	330,4	29	649,2	041,7
12	579,8	310,3	30	659,7	033,0
13	*	293,5	31	669,7	026,1
14	*	275,6	32	679,0	
15	*	258,6	33	693,1	
16	*	240,8	34	705,5	
17	*	221,5	35	717,3	
18	*	203,4			

Die * bezeichneten Linien bilden die Linienanhäufung im R -Zweig.

Nach kürzeren Wellenlängen hin liegt, wie aus der Figur zu ersehen ist, bei $\lambda = 2576$ Å eine Kante. Grundström nimmt an, daß diese Kante von einer $1 - 1$ -Bande herrührt. Da diese Kante ein sehr verschwommenes Aussehen hat, wurde versucht, sie durch besondere Aufnahmen aufzulösen. Es gelang zwar, einige in der Kante befindliche Linien auszumessen, jedoch war es unmöglich, diese mit solchen Linien zu kombinieren, die benachbarten Bandenserien angehören.

Da hier der interessante Fall vorlag, daß die Bande in Emission bei niedrigen Drucken gar nicht erscheint, sondern erst bei höheren Drucken hervortritt, wurde nach dem Grenzdruck gesucht, bei welchem die Bande zum Vorschein kommt. Aufnahmen wurden deshalb bei Wasserstoffdrucken von einigen Millimetern bis zu 5 Atm. ausgeführt. Dabei bildete das Auftreten der starken Linienanhäufung im R -Zweig ein zuverlässiges Zeichen für das Vorhandensein der Bande. Diese Linienanhäufung und damit die ersten Zeichen dieser Bande traten bei einem Druck von 400 mm auf; bei höheren Drucken entwickelte sie sich rasch und war bei etwa 500 mm vollständig ausgebildet. Auch wenn der Druck bedeutend gesteigert wurde, erschienen keine neuen Linien. Es wurde in diesem Zusammenhang durch geeignete Aufnahmen gezeigt, daß das Auftreten der Bande von der besonderen Art der Erregung im Bogen bestimmt wird, von dem Druck des Wasserstoffs aber unabhängig ist, der nur für die Hydridbildung vorhanden sein muß.

Der Bogen wurde bei diesem Versuch zuerst mit 200 mm Wasserstoff und dann mit 350 mm Stickstoff gefüllt. Die Aufnahme zeigte, daß auch in diesem Falle die Bande mit voller Intensität hervortrat. Der Wasserstoffdruck ist also für die Erregung der Bande an sich nicht maßgebend, da bei Abwesenheit anderer Gase die Bande selbst bei einem Druck von 200 mm Wasserstoff nicht zum Vorschein kommt. Bestimmend ist allein der im Bogen herrschende Gesamtdruck und die durch diesen Druck verursachte Erregungsart im Bogen. Das Verschwinden der Bande bei niedrigen Drucken kann in Übereinstimmung mit den von Olsson¹⁾ bei AlH und CaH erhaltenen Ergebnissen gedeutet werden. Bei niedrigen Drucken reicht die Elektronenanregung im Bogen nicht dazu aus, den oberen prädissoziierten Zustand auszufüllen, so daß eine beobachtbare Strahlung zustande kommen kann. In Absorption dagegen ist bei den niedrigen Drucken eine thermische Emission vorhanden. Die Temperatur im Vakuumofen von 1400° C ist jedoch zu niedrig, als daß die ganze Bande hervortreten könnte, sondern reicht nur dazu aus, etwa die Hälfte der Bande zu erregen. Wird dagegen in Emission der Druck gesteigert, so setzt bei 400 mm die thermische Emission ein. Bei noch höheren Drucken steigt dann die Temperatur rasch an und die Emission ist bei 550 mm so stark, daß sich die Bande vollständig entwickelt.

Die Untersuchungen werden weiter fortgesetzt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor E. Hulthén meinen herzlichen Dank für sein stetes Interesse und seine wertvollen Ratschläge aussprechen.

Stockholm, Physikalisches Institut der Universität.

¹⁾ E. Olsson, ZS. f. Phys. **104**, 402, 1937.

Messungen über die an Prallnetzen ausgelösten Sekundärelektronen.

Von Max Sandhagen in Hamburg.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 6. Juli 1938.)

An einem feinmaschigen Metallnetz, das sich zwischen zwei auf variabler Spannung liegenden Lochblenden befindet, werden Untersuchungen über die Ausbeute und Verteilung der durch einen Primärstrahl ausgelösten Sekundärelektronen angestellt. Durch Verändern des Netzdurchmessers wird getrennt der Einfluß von Saug- und Bremsfeld auf die Bahnen der Sekundärelektronen, die z. T. seitlich am Netzrand vorbeifliegen, ermittelt. Der aufgestellte Gütegrad eines Prallnetzes erweist sich bei den benutzten verschiedenen Industrienetzen unabhängig vom Drahtmaterial als nahezu konstant, aber als klein im Verhältnis zu dem massiver Platten. Auf Grund dessen werden Verwendungsmöglichkeiten von kleinen Platten für Sekundärelektronenvervielfacher besprochen.

1. Ziel der Untersuchung. Bei einem Prallnetzverstärker treffen die an einer Photokathode ausgelösten Elektronen auf das erste mehrerer hintereinander angeordneter Netze, das zur Erreichung eines Photoelektronen-Sättigungsstromes auf einem Potential von mindestens 100 Volt gegenüber der Kathode liegt. Sie lösen dort eine in bezug auf den Primärstrahl mehrfache Menge an Sekundärelektronen (S-E) aus, die dann auf das zweite, um die Stufenspannung von etwa 60 Volt positivere Netz gelangen und hier wiederum ein Vielfaches ihrer selbst an S-E auslösen usw. Es liegt somit jedes Prallnetz, abgesehen vom ersten und letzten, im elektrischen Wirkungsbereich der vor und hinter ihm liegenden Netze, d. h. die ausgelösten S-E stehen gleichzeitig unter dem Einfluß eines Saug- und Bremsfeldes (auch Zug- und Druckfeld genannt). Nun ist bekannt, daß ein Hochvakuum-Doppelweg-Gleichrichter, bei dem ein Glühkathodendraht in der Mitte zwischen zwei parallelen Anodenebenen gespannt ist, nicht arbeitet, da das Druckfeld die Wirkung des Zugfeldes kompensiert. Da zu vermuten ist, daß an einem Prallnetz eine ähnliche Wirkung auftritt und es als unzweckmäßig erscheint, von der *Gesamtverstärkung*¹⁾ auf den Mechanismus einer Einzelstufe zu schließen, sollen die *Teilvorgänge* an einem einzelnen Netz untersucht werden.

¹⁾ Georg Weiss, Fernsehen und Tonfilm Nr. 6, S. 41, 7. Jahrg., Juni 1936; W. Kluge, O. Beyer und H. Steyskal, ZS. f. techn. Phys. Heft 8, S. 219, 18. Jahrg., 1937.

Für ein Einzelnetz wird der auf dies hinbewegte Elektronenschwarm als relativer Primärstrahl anzusehen sein. Von diesem löst ein Teil durch Aufprall auf die Metalloberfläche je nach seiner Geschwindigkeit eine ganz bestimmte Menge S-E aus, und zwar vorwiegend an der zur Kathode gewandten vorderen Netzfläche. Der übrige Teil gelangt als Reststrom ungehindert durch die Maschen auf das nächstfolgende Prallnetz. Die so ausgelösten S-E werden nun infolge des vorliegenden Saugfeldes mehr oder weniger stark durch die Maschen hindurch auf das nächstfolgende Netz

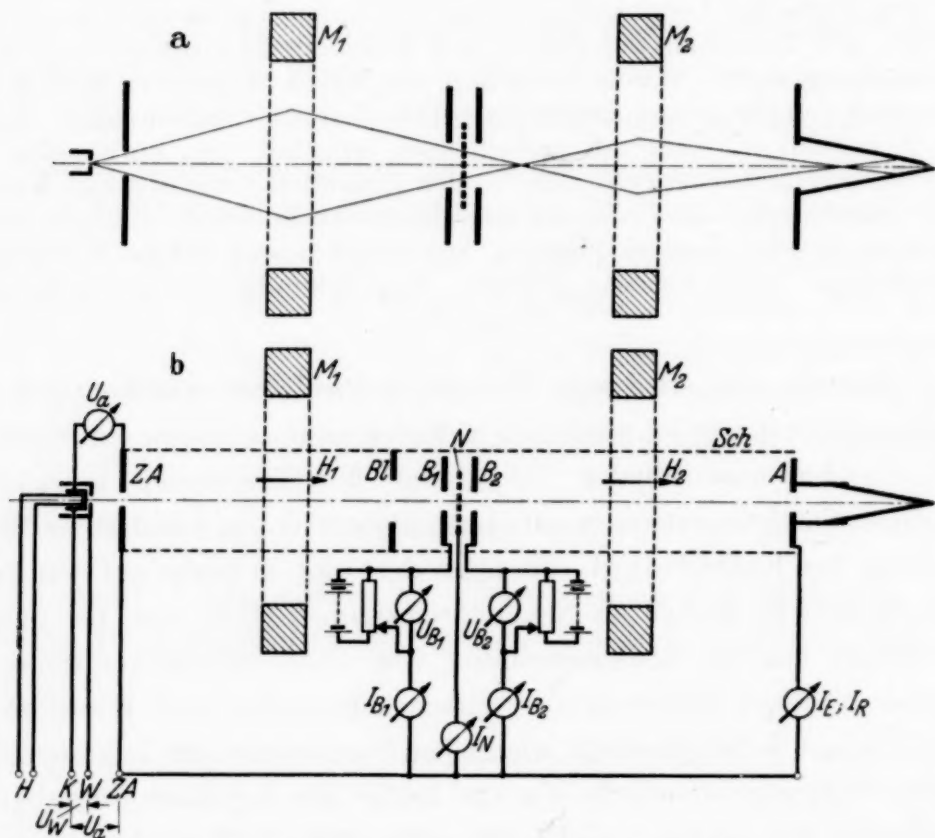


Fig. 1. a) Primärstrahlengang. b) Schaltschema.

A Auffänger; B_1 , B_2 , B_3 Lochblenden; M_1 , M_2 Magnetspuln; H_1 , H_2 Richtung der Magnetfelder; N Netz; ZA Zusanode; Sch Schutzkäfig.

gezogen. Sie bilden also mit dem vorher erwähnten Reststrom zusammen den relativen Primärstrom der nächstfolgenden Stufe, womit sich der Vorgang wiederholt. Die daraus sich ergebenden Geschwindigkeitsunterschiede vom Betrag der Stufenspannung der auf ein einzelnes Netz treffenden Elektronen machen die Resultate unübersichtlich und werden deshalb in den nachfolgenden Versuchen vermieden.

Zur Untersuchung der mengenmäßigen Verteilung der ausgelösten S-E in Abhängigkeit von den verschiedenartig eingestellten Spannungsdifferenzen

zwischen dem Prallnetz und den ihr benachbarten Netzen ist die in Fig. 1 angedeutete Apparatur verwendet worden.

2. *Versuchsanordnung. Gang der Messungen. Fehlerquellen.* Das zu untersuchende Netz N befindet sich zwischen zwei 8 mm voneinander entfernten Lochblenden B_1 und B_2 , an die unmittelbar oder über Potentiometer unabhängig voneinander willkürliche Spannungsdifferenzen U_{B_1} und U_{B_2} gegen N gelegt werden können. In bezug auf die elektrische Feldverteilung wirken B_1 und B_2 annähernd wie zwei dem Netz N benachbarte Prallnetze. Der Primärstrahl entstammt einer indirekt geheizten Kathode, die in üblicher Weise von einem Wehnelt-Zylinder umgeben ist. Der Emissionsstrom durchläuft zunächst eine an die Zuanode ZA gelegte Spannung U_a , die bei den orientierenden Vorversuchen zwischen 400 und 2000 Volt geändert, bei den übrigen Messungen auf 600 Volt konstant gehalten wurde. Außerdem kann bei den ersten im 4. Abs. erwähnten Untersuchungen das Netz durch eine Schwenkvorrichtung zeitweilig aus dem Strahlengang entfernt werden. Die Elektronen können dann, durch zwei kurze eisengekapselte Magnetspulen (M_1 und M_2 mit den Feldern H_1 und H_2) gebündelt, ohne anzustoßen durch die Blenden Bl , B_1 und B_2 hindurchfliegen, um am anderen Ende der Röhre in den Auffänger A zu gelangen, und zwar durch folgende Maßnahme (Fig. 1b). Der zunächst erst schwach zusammengefaßte Elektronenstrom erzeugt auf der mit Leuchtsubstanz versehenen Vorderseite von B_1 einen kreisringförmigen Leuchtfleck. Durch gleichzeitiges Richten und Verstärken des Magnetfeldes H_1 bis zum gleichmäßigen Verschwinden des Leuchtflecks wird das Anstoßen der Elektronen vermieden, und zwar bei größtmöglichem Strahlquerschnitt ($\varnothing_2 = 4-5$ mm) in der Prallnetzebene. Die Abbildungsebene selbst liegt dann hinter B_2 . Beim Variieren der Zusatzspannung U_{B_1} und der damit verbundenen Änderung der Elektronengeschwindigkeit zwischen ZA und B_1 verschiebt sich die Abbildungsebene und bewirkt eine Änderung des wirkenden Strahlquerschnitts. Dies wird durch den Einbau der Blende Bl vermieden, die wie die Zuanode auf dem Potential U_a liegt, denn die Zusatzspannung U_{B_1} greift durch diese nur wenig durch. Es ist also zwischen ZA und Bl elektrisch annähernd ein feldfreier Raum geschaffen, d. h. eine konstante Elektronengeschwindigkeit im Wirkungsbereich der Magnetspule M_1 erreicht. Die Form des Auffängers ist als Kegel mit kleinem Öffnungswinkel ausgebildet, um einen Rückstrom elastisch reflektierter Elektronen möglichst zu unterbinden. Er besitzt außerdem eine mit Leuchtsubstanz versehene Lochplatte, die eine Ausrichtung der Magnetspule M_2 gestattet. Die Innenwand der Glasröhre ist zum Schutz

störender Wandaufladungen mit einem Wolfram-Netzzylinder *Sch* ausgelegt. Schutzkäfig, Auffänger, Prallnetz, Zuanode und Blende *Bl* liegen auf dem gleichen Potential U_a . Sämtliche Elektroden sind getrennt aus der Röhre herausgeführt, um die zu- oder abfließenden Stromanteile getrennt messen zu können.

Bei zunächst aus dem Strahlengang herausgeschwenktem Netz wird der Primärstrom J_E im Auffänger ermittelt und seine Konstanz während der Messung überwacht. Ferner werden die Fehlerströme an den Blenden B_1 und B_2 in Abhängigkeit der Zusatzspannungen (z. B. U_{B_2} bis zu 1500 Volt bei $U_a = 600$ Volt) gemessen. Nach dem Einschwenken des Netzes erhält der Auffänger nur noch den Anteil J_R der ungehindert durch die Maschen von *N* hindurchfliegenden Elektronen. Die Differenz $J_E - J_R = J'_N$ ergibt also den Teil der tatsächlich auf das Netz aufprallenden Elektronen. Es wird aber an *N* infolge der mehr oder weniger stark abgesaugten, an *N* ausgelösten S-E nur der Stromanteil J_N gemessen. Ferner können die Teilströme J_{B_1} , J_{B_2} , J_{ZA} , sowie alle anderen Ströme nacheinander mit einem Siemens-Galvanometer (1 Skt. = $1,33 \cdot 10^{-7}$ A) ermittelt werden. Durch ein zweites gleiches Instrument wird besonders bei fest eingebautem Prallnetz dauernd die Primäremission als Summe der Teilströme $J_E = J_{B_1} + J_{B_2} + J_N + J_R$ überwacht. In dieser Summe ist also der etwaig an der Zuanode auftretende Fehlerstrom nicht einbegriffen.

Bei sämtlichen graphischen Darstellungen werden die innerhalb der Röhre auf eine Elektrode hinfliegenden Elektronenströme als positiv, entsprechend alle wegfliegenden als negativ bezeichnet und dargestellt.

Von den Fehlermöglichkeiten der Versuchsanordnung sind zunächst die Isolationsströme zu erwähnen, die sowohl innerhalb als auch außerhalb der Röhre von den auf Anodenpotential liegenden Zusatzbatterien und deren Potentiometer zur geerdeten Kathode fließen. Ihre Beseitigung (unter 1% der zu messenden Ströme) wird durch lange Glaswege zwischen den einzelnen Elektroden (Ringquetschfuß) und durch eine gute Isolation des gesamten Aufbaus erzielt. Eine weitere Schwierigkeit, die Erreichung einer konstanten Emission in Anbetracht der kleinen auftretenden Ströme, wird durch eine gut regelbare, indirekt geheizte Kathode erzielt. Die Konstanz wird außerdem bei jedem Meßwert kontrolliert, um bei geringen Schwankungen durch eine empfindliche Wehnelt-Regulierung augenblicklich wieder hergestellt zu werden. Dagegen nicht vollkommen zu vermeiden sind die auftretenden gestreuten Elektronen. Diese lösen vor allem an den Blenden B_1 und B_2 S-E aus, die entweder auf eine andere relativ positivere Elektrode fliegen oder aber auf dieselbe zurück müssen infolge abnehmender

Nachbarpotentiale. Die dadurch auftretenden Fehlerströme werden für die einzelnen Elektroden in Abhängigkeit der angelegten Zusatzspannungen von Zeit zu Zeit durch einen Leerlaufversuch, d. h. bei ausgebautem oder ausgeschwenktem Netz ermittelt und in Anrechnung gebracht.

3. *Untersuchungsmaterial. Ermüdungserscheinungen.* Als Untersuchungsmaterial stehen die aus der Industrie bezogenen, in nachstehender Tabelle angeführten Netze zur Verfügung.

Tabelle.

Nr.	Material	d	MZ	F_w	J'_N/J_E
1	Aluminium	9,3	1 250	55 %	58 %
2	Silber	4,0	3 200	41,5	44
3	Nickel	6,2	3 450	60	64
4	Silber	3,8	3 650	41	46
5	Silber	4,8	7 200	65	68
6	V 2 A-Stahl	3,0	12 500	56	63

(Die letzte Spalte wird erst im 5. und 6. Absatz besprochen.)

Die darin angegebenen Konstanten haben folgende Bedeutung:

MZ = Maschenzahl/cm².

F_w = wirksame Fläche in Prozent, d. h. der prozentuale Anteil der senkrecht projizierten Metallfläche zur Gesamtfläche des Netzes.

d = Drahtdurchmesser in 10⁻² mm.

Die Netze werden lediglich vor dem Einbau durch Auflegen auf ein blankes bis zur Rotglut erhitztes Blech erwärmt, um die schädlichen etwaig an der Oberfläche gebildeten Schwefelverbindungen zu zerstören. Vor Inbetriebnahme wird die auch während der Dauer der Messungen an eine Hochvakuumapparatur angeschlossene Röhre etwa 3 Stunden lang auf 400° C ausgeheizt. Die so behandelten Netze Nr. 1 und 5 ergeben bei den ersten im 4. Absatz ausgeführten Messungen verhältnismäßig konstante und hohe S-Em-Faktoren. Als dann aus technischen Gründen bei den weiteren Reinmetallnetzuntersuchungen eine Schliffrohre benutzt werden muß und damit störende Fettdämpfe auftreten und gleichzeitig der Ausheizprozeß unterbleibt, zeigen die wie oben behandelten Netze nur geringe und inkonstante S-Emissionen verbunden mit beträchtlichen Ermüdungserscheinungen. Die daraufhin vorgenommene Herabsetzung der spezifischen Belastung von 5 auf 1 $\mu\text{A}/\text{mm}^2$ reicht immer noch nicht aus, die Oberflächenauflockerungen zu vermeiden, wie an den Anlauffarben bei ausgebauten Netzen zu erkennen ist. Lediglich durch die Maßnahme, daß das Netz 24 Stunden vor der Messung ins Hochvakuum gebracht wird, können

die erwähnten Erscheinungen wenn auch nicht restlos beseitigt, so doch innerhalb gewisser Grenzen gehalten werden. Fig. 2 zeigt das Absinken des S-Em-Faktors zweier Ag-Netze Nr. 5 in Abhängigkeit von der Belastungsdauer bei gleicher spezifischer Belastung. Diese Tatsache führt zu dem Entschluß, die zu untersuchenden Netzeigenschaften unabhängig von dem absoluten S-Em-Faktor, d. h. also auch frei vom Einfluß des Netzdrahtmaterials darzustellen, wie dies später genauer ausgeführt wird.

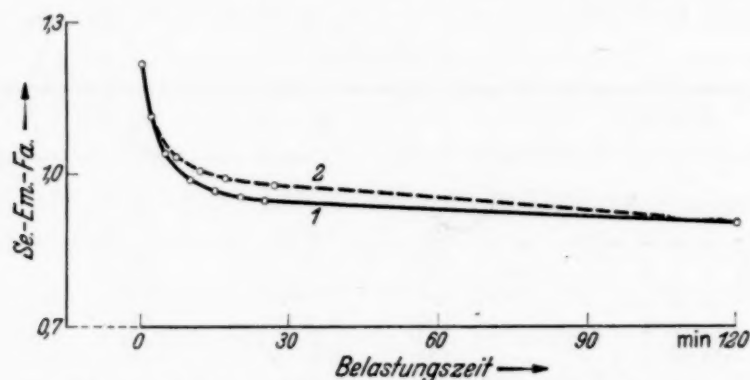


Fig. 2. Ermüdungskurven von zwei Ag-Netzen Nr. 5, spez. Belastung $6 \cdot 10^{-2} \text{ W/cm}^2$, $U_a = 600 \text{ Volt}$.

4. Verteilung der an der Vorderseite und innerhalb der Maschen des Prallnetzes ausgelösten S-E. Nachweis der Raumladung durch Glühfadenversuch. Das Prallnetz wird zu diesem Zweck in einer sogenannten *Symmetrieschaltung* untersucht, d. h. durch stets gleich große Zusatzspannungen (U_{B_1} , U_{B_2}) wird erreicht, daß das Potential von N als Bezugspunkt ausgerechnet nach beiden Seiten gleichmäßig ansteigt oder abfällt. Trifft nun ein Elektronenschwarm auf das Drahtgeflecht eines solchen Prallnetzes, so wird, abgesehen von den ungehindert hindurchfliegenden, der größte Teil in die vordere Hälfte der Maschendrahte eindringen oder daran elastisch reflektiert werden. Die austretenden S-E müssen, falls sich keine Raumladung ausbildet, schon bei wenigen Volt positiver Zusatzspannung an der Blende B_1 einen Sättigungsstrom liefern. Ein nur kleiner Anteil des Primärstrahls wird bei sehr schiefer bis streifender Inzidenz entweder in die Oberfläche eindringen, oder aber mit mehr oder weniger großem Geschwindigkeitsverlust gestreut weiterfliegen. Dadurch werden auch zwischen den Maschen S-E ausgelöst, die zum Teil auf die Blende B_2 gelangen und dort erst bei höheren Zugspannungen einen Sättigungsstrom liefern, wie das nachfolgende Experiment zeigt. Die an B_1 und B_2 gelegten gleich großen Spannungsdifferenzen gegenüber N werden von negativen nach positiven Werten stetig wachsend verändert und als Abszisse in den Fig. 3 und 4 aufgetragen. Die Ordinaten darin enthalten die reduzierten Elektronenströme (J_{B_1} , J_{B_2} , J_N

und J_R) gemessen an den entsprechenden Elektroden (B_1 , B_2 , N und A). Für die Reduktion der Ströme sind zwei Einheiten gewählt, die sich bei den Untersuchungen über Prallnetze als zweckmäßig erwiesen haben. Als Einheit für den Maßstab I gilt der wirksame auf das Netz aufprallende Primär-

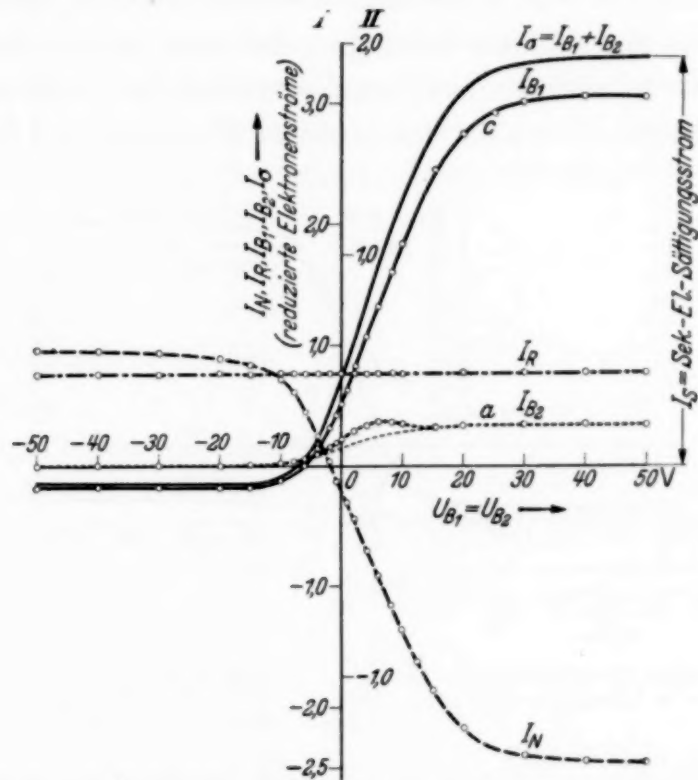


Fig. 3. Al-Netz Nr. 1 in Symmetrieschaltung. ($U_{B1} = U_{B2}$).

stromanteil J'_N , welcher durch die Differenz $J_E - J_R$ ausgedrückt ist. Bei Maßstab II ist der Gesamtstrom J_E als Einheit genommen.

So bedeutet im Diagramm z. B. J_{B2}

$$\text{für den Maßstab I: } \frac{\text{Strom auf } B_2}{J_E - J_R},$$

$$\text{für den Maßstab II: } \frac{\text{Strom auf } B_2}{J_E}.$$

Bei Betrachtung der einzelnen Kurven, wie sie sich z. B. in Fig. 3 bei der Untersuchung eines Al-Netzes Nr. 1 ergeben, überrascht zunächst der nicht auf der Abszissenachse, sondern ganz im Negativen verlaufende Stromanteil J_{B1} für negative Spannungswerte U_{B1} und U_{B2} . Dieser Befund läßt sich wohl so erklären. Die beim Aufprall auf das Netz elastisch reflektierten Elektronen treffen mit fast unverminderter Primärgeschwindigkeit ($U_a = 600\text{ Volt}$) auf die Blende B_1 (V 2 A-Stahl) auf und lösen dort mehr als 100% S-E aus, die alle auf das in bezug auf B_1 jetzt positivere Netz gelangen. Damit im Zu-

sammenhang steht auch der für kleine positive Spannungswerte von U_{B_1} und U_{B_2} über seinen Sättigungswert hinausragende Verlauf von J_{B_2} . Ein Teil der oben erwähnten an B_1 ausgelösten S-E kann vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit an dem wegen der Schwenkbewegung nur klein ausgeführten, in diesem Falle relativ negativem Netz vorbei zur Blende B_2 gelangen. Diese Störungen lassen sich dadurch beseitigen, daß man die zum Netz gewandte Seite der Blende B_1 mit einer aus Campher entwickelten Rußschicht (S-Em-Faktor < 1) versieht. Dies zeigt eine an einem Silbernetz Nr. 5 durchgeführte

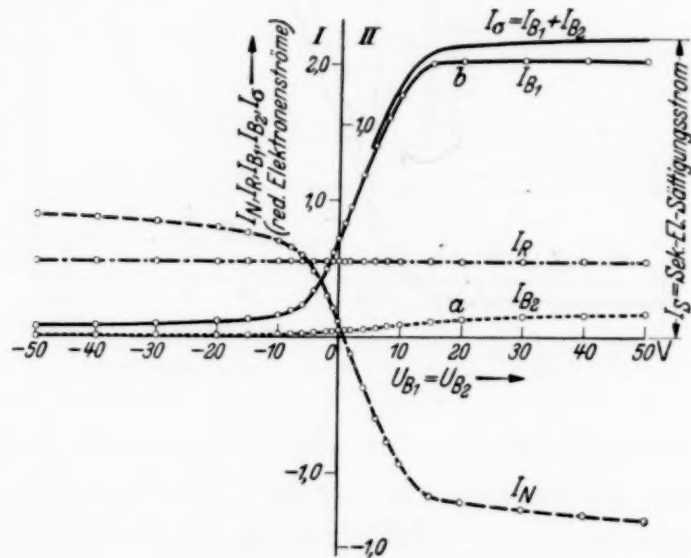


Fig. 4. Ag-Netz Nr. 5 in Symmetrieschaltung. Blende B_1 mit Rußschicht.

und in Fig. 4 dargestellte Messung. Der hier positiv auftretende konstante Strom J_{B_1} ($U_{B_1} = U_{B_2} < 0$) gibt unmittelbar den Anteil der elastisch reflektierten Primärelektronen an. Beim weiteren Verlauf dieser Kurve ist das erst bei höheren Spannungswerten ($U_{B_1} > 15$ Volt) erfolgende Übergehen in einen Sättigungswert ein Hinweis für die am Netz sich ausbildende Raumladung. Die Kurve wird zu diesem Zweck verglichen mit der in Fig. 5 dargestellten Charakteristik eines 9 mm langen zwischen den beiden Lochblenden eingebauten Glühfadens bei gleichem Sättigungsstrom als Summe der an beiden Blenden gemessenen Teilemissionsströme. Dieser Faden ist zur Schaffung möglichst übereinstimmender Verhältnisse zwischen den Hälften eines in der Mitte aufgetrennten Netzes angebracht. Berücksichtigt man dabei neben der größeren Anfangsgeschwindigkeit der S-E die verschiedene Länge des emittierenden Drahtes, die bei einem Kathodenstrahlquerschnitt von 4 bis 5 mm Durchmesser ungefähr in folgendem Verhältnis zueinander stehen:

$$L_{Gl-F} : L_{Al-N} : L_{Ag-N} = 2 : 5 : 25,$$

so findet man eine gute Übereinstimmung der entsprechenden Kurven (vgl. $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$). Außerdem erkennt man an dem Verlauf der S-Emissionskurve oberhalb des Nullpunktes im Gegensatz zur Glühfadencharakteristik die bedeutend größere Anfangsgeschwindigkeit der S-E. Die übrigen Kurven der Fig. 3 und 4 zeigen den erwarteten Verlauf. J_R stellt den bei stetigem Verändern der Zusatzspannungen doch ziemlich konstanten Anteil der ungehindert hindurchfliegenden Primärelektronen dar. Seine Größe ändert sich mit den Netzkonstanten und ist bei den Messungen stets kleiner als $1 - F_w$; denn die tatsächlich zur Wirkung kommende Fläche für den verwendeten schwach konvergenten Elektronenstrahl ist größer als die für senkrechten Einfall und paralleles Strahlenbündel definierte Größe F_w (vgl. F_w und J'_N/J_E in der Tabelle im 3. Absatz). Der Netzstrom J_N nimmt für negative Zusatzspannungen, da sämtliche S-E wieder auf das Netz zurück müssen, positive Werte an, deren maximaler Betrag für etwa $U_{B_1} = U_{B_2} = -50$ Volt den Anteil der am Netz tatsächlich zur Wirkung kommenden Primärelektronen darstellt, also J'_N vermindert um den Teil der elastisch reflektierten Elektronen. Beim stetigen Übergang vom Bremsfeld zum Saugfeld wechselt dann die J_N -Kurve vom Positiven zum Negativen über. Stellt man für jeden Abszissenwert die Summe der beiden Blendenströme als Kurve J_σ dar ($J_\sigma = J_{B_1} + J_{B_2}$), so bedeutet der Sättigungswert J_s (siehe Fig. 3 und 4), der bei $U_{B_1} = U_{B_2} = +50$ Volt als erreicht betrachtet wird, im Maßstab I den S-Em-Faktor des betreffenden Netzmaterials.

Aus den im 2. Absatz angeführten Gründen wird dieser leicht zu bestimmende Wert J_s bei den weiteren Messungen als Ordinatenmaßstab benutzt und damit Unabhängigkeit der Untersuchungen vom S-Em-Faktor des Netzdrahtmaterials erzielt.

5. *Beeinflussung des nach rückwärts gehenden S-E-Stroms durch das Verhältnis von wirkendem Strahlquerschnitt zur Netzfläche.* Nachdem im vorigen Abschnitt die Verteilung festgestellt worden ist, soll jetzt das Durchsaugen der praktisch nur an der Vorderseite ausgelösten S-E auf das nächste Prallnetz bzw. auf die Blende B_2 untersucht werden. Dabei werden nicht

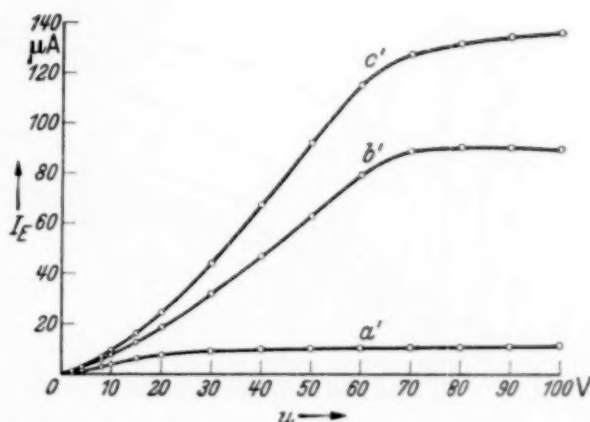


Fig. 5. Raumladekurven eines Glühdrahtes bei verschiedener Heizung. $u = U_{B_1} = U_{B_2}$.

wie bei der üblichen Verstärkerschaltung Saug- und Bremsspannung gleichzeitig, sondern eine kontinuierlich und die andere nur zeitweilig als Parameter geändert und umgekehrt, um somit den Einfluß des einzelnen Feldes getrennt zu bestimmen. Bei der an einem kleinen schwenkbaren Al-Netz Nr. 1 ($\varnothing_1 \sim 15$ mm) durchgeführten Messung¹⁾ in Fig. 6 wird die Spannung U_{B_2} stetig wachsend nach positiven Werten verändert, während das Bremsfeld als Spannungsparameter ($U_{B_1} = 0, -20, -50, \dots$ Volt) in die Kurven eingeht. Der an N ausgelöste und auf B_2 gelangende S-E-Strom wird gemessen und als reduzierter Strom ($J_s = 1,0$) eingetragen. Man

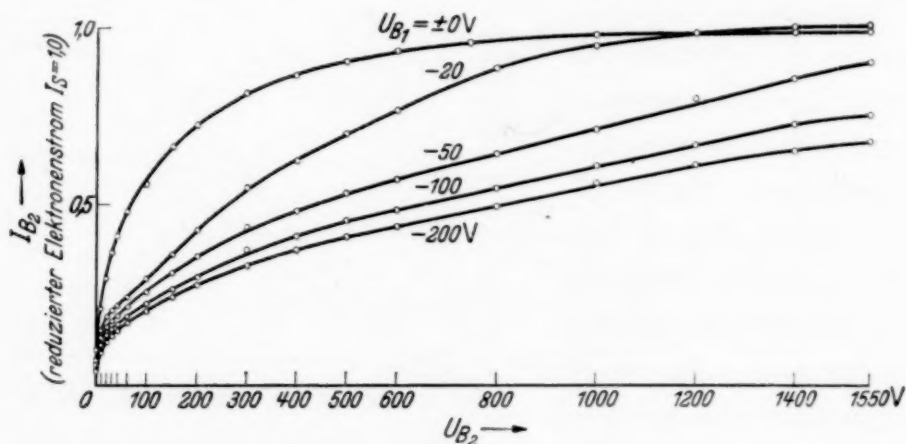


Fig. 6. Meßreihe an kleinem Al-Netz Nr. 1 ($\varnothing_1 \sim 15$ mm). $U_a = 600$ Volt. Bremsfeld als Parameter.

ersieht aus diesen Kurven, daß bei dem Parameter $U_{B_1} = 0$ ein verhältnismäßig starker Anstieg von J_{B_2} bei wachsender positiver Spannung von B_2 eintritt und ein Sättigungswert erreicht wird, während bei stärkerer negativer Vorspannung von B_1 der Anstieg der Kurven weit langsamer erfolgt. So ist beispielsweise der Strom J_{B_2} bei der Vorspannung $U_{B_1} = -50$ Volt nur etwa halb so groß als bei $U_{B_1} = 0$ Volt, beide Werte gemessen bei der Blendenspannung $U_{B_2} = 100$ Volt. Der Verlauf der Kurven scheint die in der vorliegenden Einführung gemachte Vermutung einer störenden Überlagerung von Bremsfeld und Saugfeld in der Ebene von N zu bestätigen. Demnach würde die 0-Kurve ($U_{B_1} = 0$) des Stromes J_{B_2} den durch das Netz gesaugten Anteil darstellen, der mit wachsendem Bremsfeld stark abnimmt. Die damit verbundene Vorstellung, daß durch die Wirkung des zunehmenden Bremsfeldes die S-E immer stärker auf das Netz zurückgedrückt, ohne vom durchgreifenden Zugfeld erfaßt zu werden, führt zu dem Vorschlag, ein abschirmendes Hilfsnetz anzuwenden. Die hierzu angestellten Versuche mit einem berußten Hilfsnetz ($MZ = 45$, $F_w \sim 5\%$), das zwischen B_1

¹⁾ C. Hagen und M. Sandhagen, ZS. f. Phys. **107**, 132, 1937.

und N unmittelbar vor dem Netz angeordnet ist, werden in einer Schliff-
röhre durchgeführt. Die Netze sind nicht schwenkbar angeordnet und des-
halb von größerer Ausdehnung gewählt. Die Messung zeigt, daß bei festen
Blendenspannungen ($U_{B_2} = +200, U_{B_1} = -200$ Volt) ein möglichst großer
rückwärtiger S-E-Strom dann eintritt, wenn die Hilfsnetzspannung in bezug
auf N nicht wie vermutet wenige Volt positiv, sondern mindestens einige
Volt negativ ist, d. h. also, daß das Druckfeld wieder hergestellt wird.
Der scheinbar schädliche Einfluß des Druckfeldes bei einem kleinen Netz
läßt vermuten, daß nur ein Teil der an der Vorderseite ausgelösten S-E
durch die Maschen, ein anderer
Teil dagegen außerhalb am
Rande des Netzes vorbei auf die
Blende B_2 gelangt. Das Verhält-
nis dieser beiden Stromanteile
ändert sich mit zunehmendem
Druckfeld zugunsten der hin-
durchfliegenden S-E. Um die
angedeutete Vermutung zu be-
stätigen und dabei den Einfluß
des Bremsfeldes auf das seitliche
Vorbeigehen der Elektronen
besser zu erkennen, wird anstatt
des Netzes eine kleine Al-Platte
($Pl-\varnothing_1 = 6$ mm bei einem
Kathodenstrahl- $\varnothing_2 = 4,5$ mm)
untersucht. Das Druckfeld

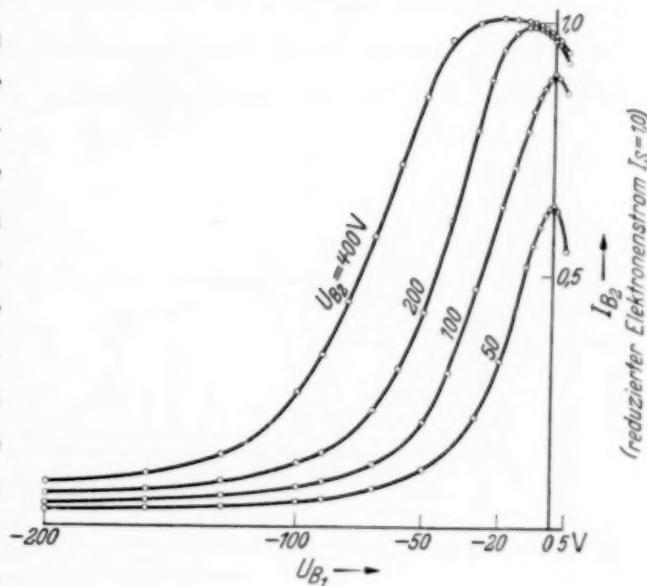


Fig. 7. Einfluß des Bremsfeldes, gemessen
an Al-Platte. $\varphi_1 = 6$ mm.

wird stetig wachsend verändert ($U_{B_1} = +5$ bis -200 Volt) und in
Fig. 7 als Abszisse aufgetragen, während das Zugfeld als Spannungs-
parameter ($U_{B_2} = 50, 100, 200, 400$ Volt) auftritt. Als Ordinate ist der
auf die Blende B_2 gelangende Stromanteil J_{B_2} mit dem im vorigen Abschnitt
erwähnten J_s -Wert als Einheit dargestellt. Das Diagramm zeigt zunächst,
daß die einzelnen Stromkurven von ihrem Maximalwert, der bei Zug-
spannungen über 200 Volt schon im Gebiet der Sättigung liegt, stark gerad-
linig abfallen, um dann je nach der Größe der Zugspannung mehr oder
weniger langsam in die Abszissenachse zu enden. Dieser Kurvenverlauf
läßt sich folgendermaßen erklären. Herrscht zwischen Platte (bzw. Netz) N
und Blende B_1 kein Potentialunterschied, so werden bei zunächst geringer
Zugspannung U_{B_2} alle die mit sehr kleinem Winkel gegen die Oberflächen-
normale und verhältnismäßig großer Anfangsgeschwindigkeit austretenden

S-E auf die Blende B_1 gelangen. Mit wachsendem Zugfeld werden dann infolge des Zunehmens der herumgreifenden Kraftlinien zunächst nur solche mit relativ großem und dann mit immer kleiner werdendem Austrittswinkel allmählich auf parabelähnlichen Kurven zur Blende B_2 gelangen. Man erkennt dies in Fig. 8 an dem sehr schwachen Absinken des Stromes J_{B_1} bei einem 10 mm Ag-Netz Nr. 5. Die bei einer Steigerung der Spannung U_{B_2} neu hinzukommenden Elektronenbahnen müssen also immer schwächer gekrümmt sein und infolgedessen in einem immer größeren Abstand durch die Netzebene führen. Eine Sättigung wird für diesen Fall nur bei beliebig hohen Zugspannungen erreicht. Dagegen werden bei schwachem Druckfeld die schon ausgebildeten Elektronenbahnen etwas mehr gekrümmt und gleichzeitig die letzten genau senkrecht austretenden Elektronen erfaßt,

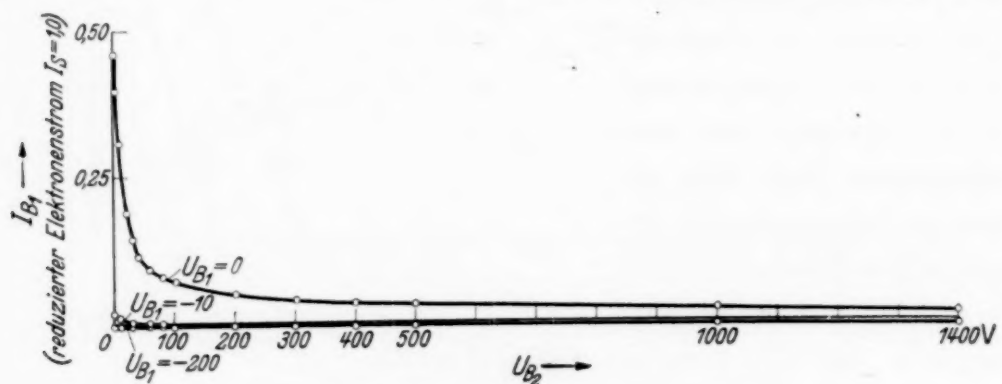


Fig. 8. Bremsfeldeinfluß auf den Rückstrom nach der Blende B_1 .
(Ag-Netz Nr. 5 $\phi_1 = 10$ mm.)

also bei entsprechenden Spannungen eine Sättigung erreicht. Daß der oben erwähnte Abstand der Elektronenbahnen beim Durchlaufen der Netzebene tatsächlich bis zu 10 mm betragen kann, zeigt die Meßreihe in Fig. 9. Bei konstant gehaltener Fleckgröße ($\phi_2 = 4,5$ mm) wird die Ausdehnung des Netzes derart geändert, daß nacheinander Netze mit verschiedenem Flächendurchmesser ($\phi_1 = 7, 10, 13, 17, 20, 23$ mm) benutzt werden. Bei sämtlichen Kurven der ersten fünf Teildiagramme ($\phi_1 = 7$ bis 20 mm) erkennt man den seitlich vorbeifliegenden Stromanteil bei keinem oder kleinem Bremsfeld an den ausgesprochenen Maxima, deren Höhe bei entsprechendem Zugspannungsparameter ($U_{B_2} = 400$ Volt) mit wachsendem Netzdurchmesser stark abnimmt. Dagegen bei 23 mm Durchmesser tritt dieser Anteil bei den hier gewählten Abständen tatsächlich nicht mehr auf (6. Teildiagramm), d. h. das Netz gilt für jede Stufenspannung als „ausgedehnt“. Mit weiterem Ansteigen des Bremsfeldes werden dann die Elektronenbahnen derart stark gekrümmt oder bildlich gesprochen nach der Mitte zusammengedrückt, daß ein immer größer werdender Anteil auf der

Platte endigt. Die betreffenden Elektronen werden somit wieder auf die Platte zurückkommen, oder im Fall eines Netzes zum Teil durch die Maschen

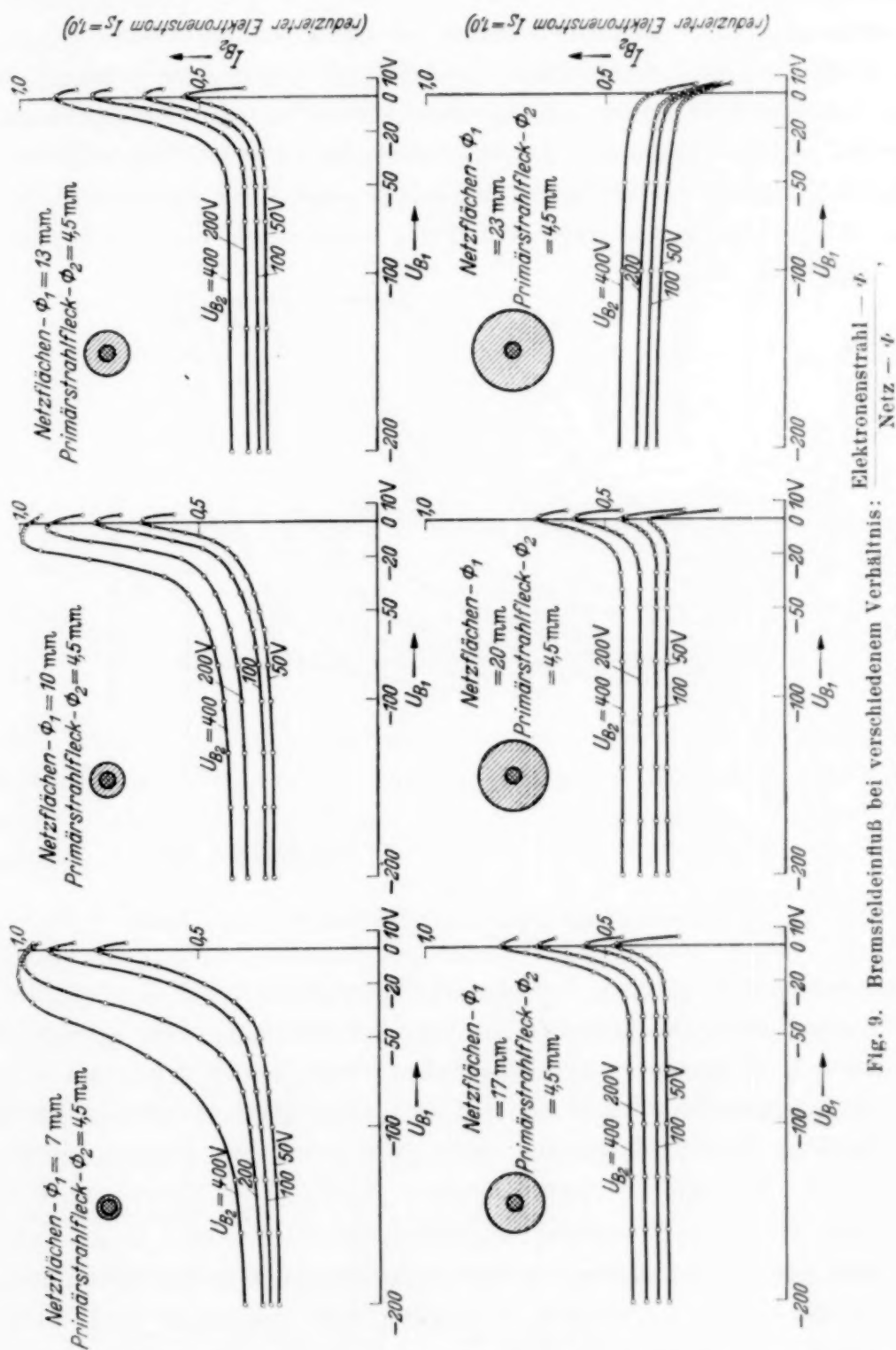


Fig. 9. Bremsfeldeinfluß bei verschiedenem Verhältnis:
gemessen an Ag-Netz Nr. 5.

hindurch gelangen. Diese Vorstellung findet man in den Fig. 7, 9, 10 gut bestätigt. Die Maxima der J_{B_2} -Kurven liegen für sämtliche Zug-

spannungsparameter U_{B_2} unterhalb der Sättigungsspannung auf der Ordinatenachse, dagegen oberhalb, je nach dem mehr oder weniger starken Überschreiten der Sättigungsspannung, bei geringen Bremsfeldwerten. Dies erkennt man besonders deutlich an der an einem kleinen Ag-Netz Nr. 5 ($\varnothing_1 \sim 6$ mm) durchgeführten, in Fig. 10 dargestellten Messung. Die hier bei sehr hohen Zugspannungswerten wenig ausgeprägt ausfallenden Maxima zeigen, daß selbst bei Bremsfeldern bis zu -100 Volt noch sämtliche S-E seitlich vorbeifliegen. Außerdem zeigt ein Vergleich der Fig. 7 und 10 den weniger starken Abfall der Netzkurven bis zum Erreichen

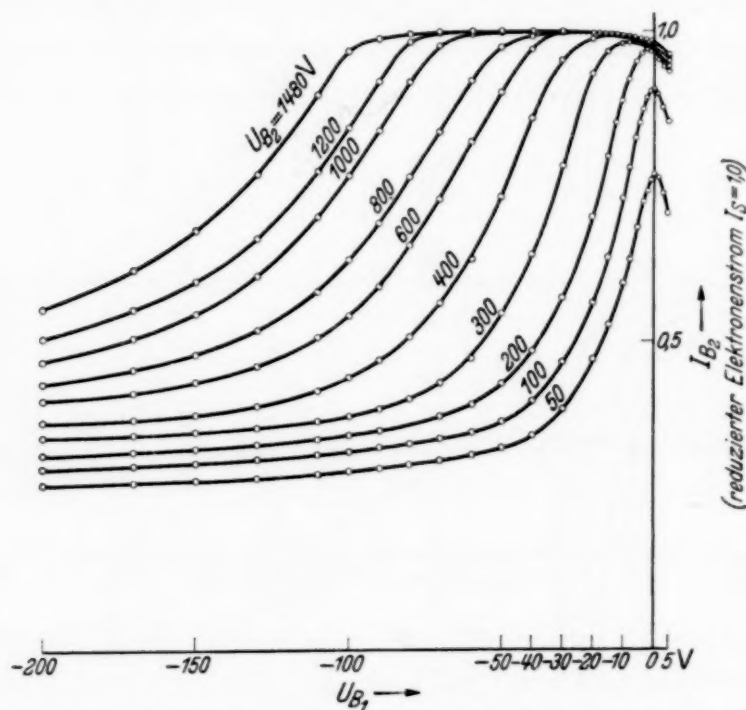


Fig. 10. Einfluß des Bremsfeldes. (Ag-Netz Nr. 5, $\varphi_1 = 6$ mm).

eines konstanten, je nach Zugspannung verschieden hohen Wertes. Dann muß aber bei einem ausgedehnten Netz der Strom J_{B_2} bei $U_{B_1} = 0$ den kleinsten Wert annehmen und bei zunehmendem Bremsfeld bis zum Betrag der Anfangsgeschwindigkeit der S-E auf einen Wert ansteigen, der sich bei weiterer Bremsfelderhöhung nicht mehr wesentlich ändert. Dies bestätigt die Messung an einem Ag-Netz Nr. 5 ($\varnothing_1 = 23$ mm) in Fig. 9.

Das in diesem Abschnitt angeführte Kurvenmaterial zeigt, daß in Prallnetzverstärkern selbst bei Stufenspannungen von 400 Volt nur ungefähr die Hälfte der wirklich ausgelösten S-E ausgenutzt wird. Durch irgendwelche abschirmende Hilfsnetze eine größere Ausbeute zu erzielen, führt zu negativen Resultaten, da die mehr gewonnenen, seitlich vorbeifliegenden S-E direkt zur letzten Anode laufen und sich somit dem weiteren

Verstärkungsvorgang entziehen würden. Weiter erkennt man, daß bei einem Verhältnis von Strahl- zu Netzdurchmesser $= 1/2$ (hier z. B. 5 mm/10 mm) für übliche Stufenspannungen von 60 Volt (d. h. $U_{B_2} = +60$, $U_{B_1} = -60$ Volt) der Anteil der seitlich vorbeifliegenden S-E schon sehr gering ist. Wenn dieser Wert, der sich von Stufe zu Stufe allmählich vergrößert, erheblich überschritten wird, so wird eine zusätzliche Fokussierungseinrichtung notwendig und damit das Anwendungsgebiet des Prallnetzverstärkers stark beschränkt. Fig. 11 zeigt z. B. die entartete Charakteristik

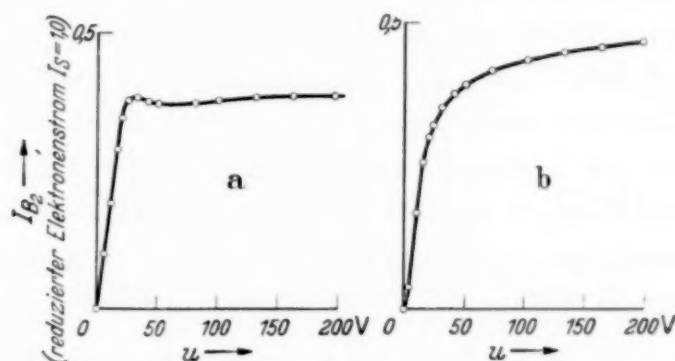


Fig. 11. Charakteristik eines
a) kleinen ($\phi_1 = 6$ mm)
b) ausgedehnten ($\phi_1 = 23$ mm)
Ag-Netzes Nr. 5 in Verstärkerschaltung. u = Stufenspannung.

eines kleinen im Vergleich zu der eines ausgedehnten Netzes. Eine Abhilfe durch Bremsfelderhöhung zu erzielen, stößt auf technische Schwierigkeiten und würde außerdem keine dem Spannungsaufwand entsprechende größere Ausbeute liefern.

6. *Einfluß von Maschenzahl und wirksamer Fläche auf die Güte eines Prallnetzes unabhängig von seiner Materialbeschaffenheit.* Da für eine Untersuchung über den Einfluß von MZ und F_w nur wenige Industrienetze zur Verfügung stehen, die außerdem noch aus verschiedenem Material hergestellt sind, soll der Gütegrad eines Netzes unabhängig von seinem Material festgelegt werden. Zunächst ist für die Ausbeute eines Prallnetzes maßgebend der prozentuale Anteil der tatsächlich auf die Netzdrähte aufprallenden Primärelektronen, d. h. $\beta = \frac{J'_N}{J_E}$ (wo $J'_N = J_E - J_R$ ist) und zum anderen das Verhältnis der durchgesaugten zu den gesamt ausgelösten S-E, also $\gamma = \frac{J_{B_2}}{J_s}$. Der Gütegrad $\alpha = \frac{J'_N}{J_E} \cdot \frac{J_{B_2}}{J_s}$ ist also das Produkt zweier Quotienten, von denen der erste bei fester Primärgeschwindigkeit eine reine Funktion der wirksamen Fläche ist und aus den gemessenen Größen J_E und J_R

ermittelt wird. Der zweite hängt lediglich von der Maschenzahl ab und bewirkt durch seinen Divisor J_s die Materialunabhängigkeit. Er wird bestimmt durch Messung der Ströme J_{B_2} bei Verstärkerschaltung und J_s bei Symmetrieschaltung. Da dieser Quotient von der Stufenspannung abhängig ist, wird er für praktisch minimal und maximal angewendete Spannungen ermittelt. Beide Quotienten sowie der Gütegrad selbst

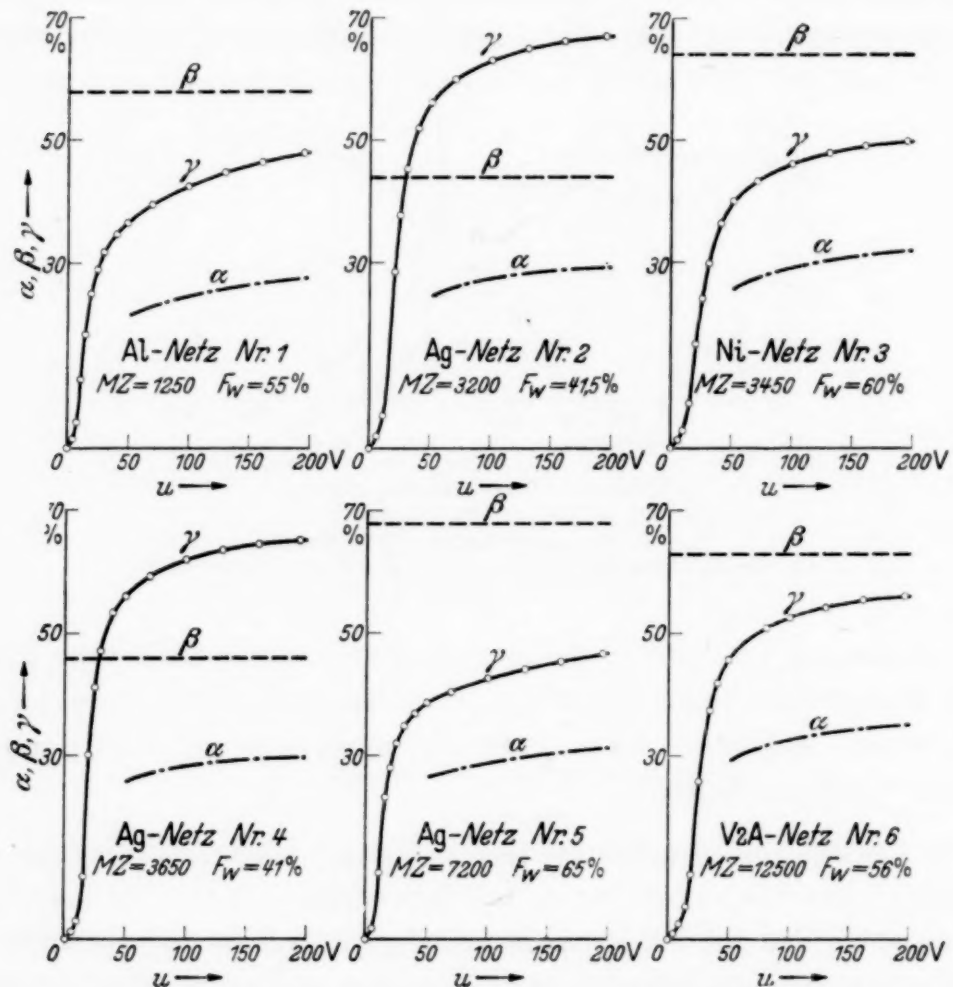


Fig. 12. Gütegrad verschiedener Netze bei Verstärkerschaltung.

$$u = \text{Stufenspannung, Gütegrad } \alpha = \beta \cdot \gamma \text{ in } \%, \quad \beta = \frac{I'_N}{I_E}, \quad \gamma = \frac{I_{B_2}}{I_S}.$$

verschiedener Netze sind in der Fig. 12 graphisch dargestellt. Ein Vergleich zeigt, daß bei verschieden großer Ausbeute $\gamma = \frac{J_{B_2}}{J_s}$ infolge des entsprechend umgekehrten Verhaltens des ersten Quotienten β der Gütegrad der angeführten Netze ungefähr gleich groß ist. Dieses Resultat, gewonnen bei 600 Volt Primärgeschwindigkeit, ändert sich beim Übergang zu den üblichen Stufenspannungen noch zugunsten der Netze mit größerem F_w .

da der Quotient $\frac{J'_N}{J_E}$ bei kleineren Geschwindigkeiten größer wird. Außerdem erkennt man, daß der Gütegrad einer Prallnetzstufe nur etwa ein Drittel des eines Sprungbogenverstärkers beträgt, da für eine massive Platte, bei der die S-E nach der Auslösungsseite hin abgesogen werden, dieser nahezu gleich 1 ist.

7. *Nutzanwendungen der gewonnenen Erkenntnisse.* Besonders der 6. Abschnitt zeigt, daß eine wesentliche Verbesserung der Prallnetzverstärker durch irgendwelche Änderungen der üblichen Netze nicht mehr erreicht werden kann. Dagegen bietet die in Fig. 7 untersuchte kleine Platte eine unmittelbare Verwendungsmöglichkeit als erste Stufe bei einem solchen Verstärker z. B. in Verbindung mit einem Farnsworth-Bildfeldzerleger. Sie bewirkt dort bei entsprechend kleinem Bremsfeld auf Grund der seitlich vorbeifliegenden S-E eine zwei- bis dreifache Gesamtverstärkung.

Eine weitere Anwendung der kleinen Platte bietet der nachfolgende Vorschlag eines S-E-Vervielfachers¹⁾, bei dem als Verstärkerelement ein sogenanntes *Plattennetz* benutzt wird. Dies ist eine Anzahl kleiner quadratischer Platten, die wie bei einem Schachbrett z. B. die dunklen Felder nebeneinander, natürlich zusammenhängend, angeordnet sind, und somit eine wirksame Fläche $F_w = 50\%$ ergeben. Ein zweites gleiches Plattennetz wird nun als zweite Stufe so versetzt dahinter angeordnet, daß bei senkrechter Durchsicht eine kleine Platte eine Lücke des nächsten Netzes und umgekehrt abdeckt. Ein auffallender relativer Primärstrahl prallt dann bei dieser Anordnung abgesehen von der ersten Stufe stets zu 100% auf. Um das seitliche Herumsaugen der ausgelösten S-E zu ermöglichen, wird das zwangsläufig auftretende Bremsfeld durch ein zweites unmittelbar hinter jeder Stufe, aber von dieser isoliert angebrachtes Plattennetz abgeschirmt. Auf diese Weise werden also, um den Gütegrad des vorigen Abschnitts zu benutzen, die beiden darin auftretenden Quotienten theoretisch etwa = 1 gemacht. Praktisch werden allerdings noch unvermeidliche Abweichungen eintreten, wie z. B. Störungen infolge der mit der Anordnung verbundenen Feldverzerrungen. Eine weitere Schwierigkeit ist die Beseitigung des von Stufe zu Stufe größer werdenden Strahlquerschnitts der relativen Primärströme. Ein zur Demonstration ausgeführtes Experiment bei der in Fig. 13 angedeuteten Zwei-Stufenschaltung bestätigt die Überlegungen. Von einem Primärstrom J_E fällt ein Anteil auf die erste Stufe, eine Al-

¹⁾ Dieser Vorschlag mit kleinen Platten bzw. schmalen Streifen ist Gegenstand einer Patentanmeldung.

Blende B_0 mit dem Potential U_a . Die hier ausgelösten S-E gelangen durch die Blendenöffnung mit dem restlichen Anteil der Primärelektronen zusammen auf die zweite Stufe, eine Al-Platte Pl . Die hier wiederum ausgelösten S-E fliegen dann seitlich an Pl vorbei auf die Auffangplatte B_2 , die um eine weitere Stufenspannungsdifferenz positiver ist. Dieser letzte Vorgang tritt aber nur dann ein, wenn die Blende B_1 das Bremsfeld zwischen B_0 und Pl abschirmt, wie aus dem Diagramm I in Fig. 13 mit stetig wachsend veränderter Stufenspannung u als Abszisse hervorgeht.

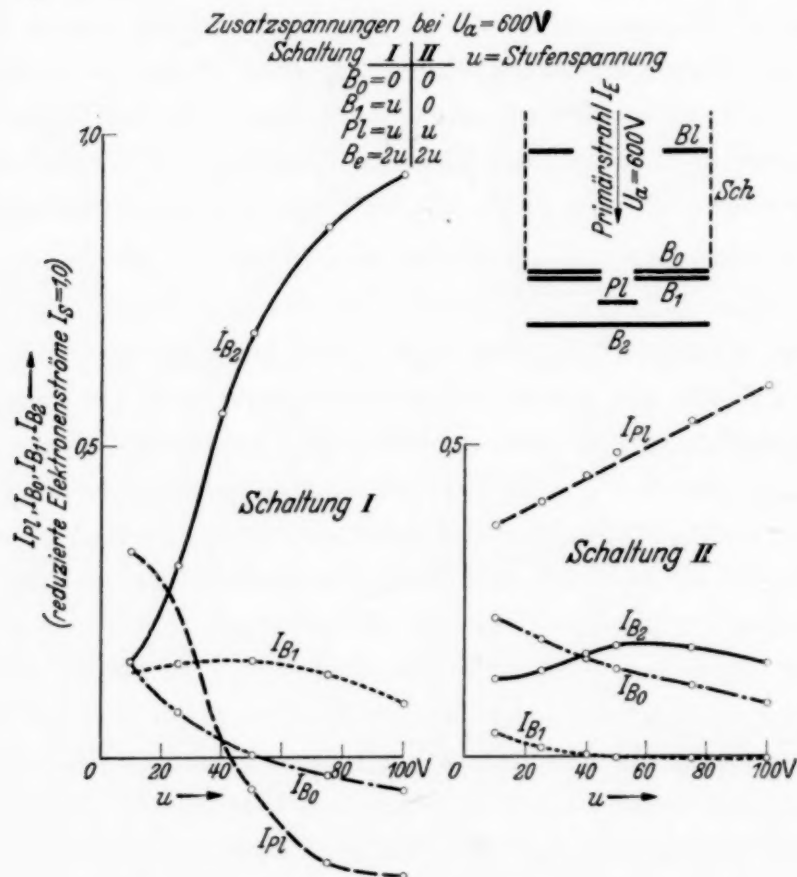


Fig. 13. Wirkungsweise eines Plattenetzes.
I: abgeschirmtes, II: wirkendes Bremsfeld und Schaltschema.

Der Verlauf der einzelnen Kurven, besonders das nennenswerte Ansteigen der J_{B_2} -Kurve, deutet auf die Anwendung höherer Stufenspannungen hin, die im Gegensatz zum Prallnetzverstärker allerdings auch eine entsprechende Ausbeuteerhöhung bewirkt. Im Diagramm II sind die vorigen Verhältnisse nur dadurch abgeändert, daß durch das gleiche Potential von B_1 wie B_0 die abschirmende Wirkung von B_1 aufgehoben ist. Ein Vergleich zeigt noch einmal deutlich den Einfluß des Bremsfeldes. Da die Abschirmspannungen an B_1 , Bl und Sch (siehe auch Fig. 1) für jeden Stufenspannungs-

wert so reguliert werden, daß für J_{B_2} ein Maximum eintritt, zeigen die Kurven zum Teil einen unregelmäßigen Verlauf.

Das kritische Maß der Quadratseite einer solchen kleinen Platte bzw. Lücke ist von dem technisch möglichen Abstand zweier Stufen abhängig. Es wird daher am besten an Hand der Gesamtverstärkung solcher praktisch ausgeführten Vervielfacher ermittelt.

8. *Zusammenfassung.* Die Teilvorgänge in einem Prallnetzverstärker werden an einem einzelnen Netz mit einer besonderen Versuchsanordnung untersucht. Von einem für ein einzelnes Prallnetz relativen Primärstrahl löst ein Teil durch Aufprall auf das Drahtgeflecht vorwiegend an der vorderen Netzfläche S-E aus, auf die gleichzeitig das Bremsfeld des vorangehenden und das Saugfeld des dahinterliegenden Netzes wirkt. An zwei in ihrer Wirkung die Nachbarnetze von N ersetzende Lochblenden werden bei entsprechend gewählten Spannungsdifferenzen gegenüber N die S-E-Stromanteile gemessen. Die ungehindert durch die Maschen hindurchfliegenden Primärelektronen werden, davon getrennt, in einem besonderen Auffänger bestimmt.

Ermüdungserscheinungen des Netzdrahtmaterials werden gemessen.

Zunächst wird bei einer sogenannten Symmetrieschaltung die Verteilung der an der Vorderseite und zwischen den Maschen eines Netzes ausgelösten S-E ermittelt. Die am Netz sich ausbildende Raumladung läßt sich durch Vergleich von S-Em-Kurve und Glühfadencharakteristik nachweisen. Der bei dieser Schaltung gemessene Sättigungsstrom, bezogen auf die tatsächlich zur Wirkung kommenden Primärelektronen, gibt unmittelbar den S-Em-Faktor an, bietet also eine Beurteilungsmöglichkeit von aktivierten Schichten auf Drahtoberflächen.

Der Einfluß von Saug- und Bremsfeld wird getrennt ermittelt und die Vermutung über die schädliche Wirkung des Bremsfeldes widerlegt. Bei relativ kleinen Netzen oder auch Platten fliegen die S-E bei sehr kleinem Bremsfeld, wie festgestellt wird, auf seitlich am Netz vorbeiführenden Bahnen zur Blende B_2 . Diese an den ersten Stufen eines Verstärkers ausgelösten S-E würden sich dem weiteren Verstärkungsvorgang entziehen. Der Abstand der Elektronenbahnen in der Netzebene vom Entstehungspunkt, der bei den geometrischen Verhältnissen der Versuchsanordnung bis zu 10 mm betragen kann, wird durch eine Bremsfelderhöhung stark verkleinert.

Der Gütegrad eines Prallnetzes unabhängig vom Drahtmaterial wird aufgestellt und an einigen Industrienetzen bestimmt. Dieser ist bei ver-

schiedenen Netzen ungefähr gleich groß, aber nur klein im Verhältnis zu dem massiver Platten.

Auf Grund der günstigen Absaugmöglichkeit der S-E an einer kleinen Platte wird diese unmittelbar sowie eine Anordnung mehrerer als Platten-netz für praktische Prallnetzverstärker vorgeschlagen.

Die vorliegende Arbeit ist durchgeführt worden im Institut für angewandte Physik der Hansischen Universität zu Hamburg unter Anregung und Anleitung von Herrn Dr. C. Hagen, dem ich an dieser Stelle für das stets große Interesse und die wertvollen Ratschläge meinen aufrichtigen Dank ausspreche.

Gleichzeitig danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. H. G. Möller, für die Förderung meiner Ausbildung, sowie dem Feinmechanikermeister F. Bäcker jun. für die Herstellung der Röhrenaufbauten und der Firma Fernseh A.-G. Berlin für die freundliche Unterstützung mit Instrumenten.

Innere Reibung und Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie.

Von **S. Tomonaga**, z. Zt. in Leipzig.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juli 1938.)

Unter Zugrundelegung des Fermi-Gasmodells werden die Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie berechnet. Es stellt sich dabei heraus, daß sich die Zähigkeit bzw. die Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen umgekehrt proportional zu T^2 bzw. T ändert, wobei T die Temperatur bedeutet. Die Zähigkeit ist so groß, daß eine Schwingung der Kernmaterie bei tiefen Temperaturen stets aperiodisch gedämpft wird, und also der Atomkern seine Anregungsenergie nur in Form von Wärme behalten kann. Die Schwingungen, die nach Bohr beim Kernphotoeffekt eine Rolle spielen, müssen daher mit der Abweichung der Kernmaterie vom Gaszustand verknüpft sein. Ebenso ist die Wärmeleitfähigkeit sehr groß. Die Wärme breitet sich also sehr schnell in der Kernmaterie aus und damit wird die übliche Betrachtungsweise bei Kernreaktionen gerechtfertigt, bei der man diese endliche Ausbreitungszeit von vornherein vernachlässigt. Es wird aber wohl unter besonderen Umständen möglich sein, daß sich diese endliche Zeitdauer bemerkbar macht, z. B. falls es sich um einen Zusammenstoß des Atomkerns mit einem sehr energiereichen Teilchen handelt.

Bohr¹⁾ hat darauf hingewiesen, daß der Energieaustausch zwischen den einzelnen Bausteinen eines Atomkerns so intensiv ist, daß die Bewegungen der Bausteine keineswegs als nahezu unabhängig angesehen werden können; vielmehr wird die Energie, die ein einzelnes Teilchen besitzt, sich stets sehr schnell über die ganzen Kernbausteine verteilen. Insbesondere können die angeregten Zustände des Atomkerns keineswegs als Anregungen eines einzelnen Teilchens in einem mittleren Feld der übrigen betrachtet werden. Dieser Umstand legt es nahe, den Kern eher mit einem Flüssigkeitströpfchen zu vergleichen und die angeregten Zustände als die Schwingungen des Tropfens zu betrachten. Eine solche Behandlung der angeregten Zustände wäre aber nur dann richtig, wenn eine solche Schwingung nicht durch Reibung auch sehr schnell in Wärmeenergie übergeführt würde. Wir haben uns daher die Aufgabe gestellt, die innere Reibung und die Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie abzuschätzen. Es wird sich dabei herausstellen, daß die Zähigkeit der Kernmaterie insbesondere bei tiefen Temperaturen so groß ist, daß eine Schwingung des Flüssigkeitstropfens stets aperiodisch gedämpft wird; daß also die angeregten Zustände

¹⁾ N. Bohr, *Nature* **137**, 344, 351, 1936; N. Bohr u. F. Kalckar, *Danske Vid. Selsk.* **14**, Nr. 10, 1937.

ebensowenig als einzelne Schwingungen des Flüssigkeitstropfens wie als Anregungen einzelner Protonen oder Neutronen betrachtet werden können. Dieses Ergebnis hindert nicht, Eigenschaften der Kernmaterie, die durch Mittelung über viele Teilchen bzw. Schwingungen im Temperaturgleichgewicht zustande kommen, nach einem dieser einfachen Modelle zu behandeln. In der Tat kann man z. B. die Niveaudichte und spezifische Wärme sowohl nach der Thomas-Fermi-Methode, wie mit dem Modell des schwingenden Tropfens ungefähr richtig abschätzen.

Auch der vorliegende Versuch geht darauf aus, ein einfaches Modell, genauer gesagt das Fermi-Gasmodell zugrunde zu legen und dabei diese Transporterscheinungen einfach gaskinetisch zu betrachten. Freilich werden die wahren Verhältnisse im Kern weitgehend von denen des betrachteten Modells abweichen. Es erhebt sich die Frage, ob diese einfache gaskinetische Methode überhaupt anwendbar ist, weil die Wellenlänge der Gasmoleküle und die Quadratwurzel des Stoßquerschnittes beide größer als der mittlere Abstand der Teilchen im Atomkern sind. Diesem Sachverhalt entsprechend muß der klassische Stoßbegriff, der in der kinetischen Theorie wesentlich ist, seinen Sinn verlieren. Es ist deshalb nicht erlaubt, diese Zusammenstöße einzeln zu betrachten, weil sie ja wegen der großen Wellenlängen miteinander interferieren. Auch haben Begriffe wie etwa die Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß infolge des großen Stoßquerschnittes nur wenig Sinn. Der Energieaustausch zwischen den Kernbausteinen findet also nicht wie bei Gasmolekülen stoßartig statt, indem die betreffenden Teilchen vor und nach dem Stoß wohldefinierte kinetische Energien haben, sondern sie tauschen ihre Energie dauernd aus, wie es bei den Molekülen in Flüssigkeiten oder im Kristall der Fall ist. Trotzdem ist es wohl erlaubt, aus der vorliegenden Betrachtung größenordnungsmäßig gültige Schlüsse zu ziehen.

Die Transporterscheinungen im Fermi- (und Bose-) Gas wurden bereits von Uehling und Uhlenbeck¹⁾ ausführlich untersucht, deren Methode hier ohne wesentliche Änderung benutzt werden soll. Ihr Verfahren läßt sich kurz in Abschnitt 1 zusammenfassen.

1. Kinetische Theorie des Kerngases. Das Kerngas kann man als eine Mischung aus vier Gasarten auffassen. Es besteht nämlich aus vier Arten von Molekülen, d. h. aus Protonen und Neutronen mit positivem bzw. negativem Spin. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die vier Bestand-

¹⁾ E. A. Uehling u. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **43**, 552, 1933; E. A. Uehling, ebenda **46**, 917, 1934.

teile dieselbe Dichte und die gleiche Verteilungsfunktion (im Sinne der kinetischen Theorie) haben.

Es sei nun $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ die Verteilungsfunktion, d. h. die mittlere Anzahl der Moleküle einer Gasart in einer Phasenzelle vom Volumen h^3 , deren Lage im Phasenraum durch sechs Parameter x, y, z, v_x, v_y und v_z charakterisiert ist, wobei x, y, z die Orts- und v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskoordinaten sind. Die Grundgleichung der kinetischen Theorie lautet dann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + X_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = a - b. \quad (1.1)$$

Hierin bedeuten die X_α , $\alpha = x, y$ und z , die äußeren Kraftkomponenten; a auf der rechten Seite aber stellt die Anzahl der Moleküle einer Gasart dar, die in der betreffenden Zeiteinheit durch Zusammenstöße in die betreffende Zelle eintreten, während b die Anzahl der Moleküle derselben Art, die in der Zeiteinheit durch Zusammenstöße aus der Zelle herausgeschleudert werden. Bei zweifach vorkommenden griechischen Indizes soll stets über x, y und z summiert werden.

Bei einem Zusammenstoß zweier Moleküle bleibt die Summe ihrer Geschwindigkeiten nach dem Impulssatz erhalten. Sind \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 die Geschwindigkeiten der beiden Moleküle vor dem Stoß, und $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$ die Geschwindigkeiten nach dem Stoß, so ist also

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1. \quad (1.2)$$

Ferner bleibt nach dem Energiesatz der Betrag der Relativgeschwindigkeit, den wir g nennen, beim Zusammenstoß erhalten:

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| &= |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'| \\ &= g. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Die Richtung der Relativgeschwindigkeit kann sich aber dabei ändern. Wir bezeichnen nun den Winkel zwischen den beiden Relativgeschwindigkeiten mit ϑ (dabei sei der Azimut φ), und den Wirkungsquerschnitt für den betreffenden Zusammenstoß mit $w(g, \vartheta)$. Die Größen a und b sind dann folgendermaßen darzustellen:

$$\left. \begin{aligned} a &= \int d\Phi_1 \int g w(g, \vartheta) d\Omega f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}'_1) \{1 - f(\mathbf{v})\} \{1 - f(\mathbf{v}_1)\}, \\ b &= \int d\Phi_1 \int g w(g, \vartheta) d\Omega f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_1) \{1 - f(\mathbf{v}')\} \{1 - f(\mathbf{v}'_1)\} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_1 &= (m/h)^3 dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z}, \\ d\Omega &= \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Den verschiedenen Typen von Zusammenstößen entsprechend besteht $w(g, \vartheta)$ aus verschiedenen Summanden, wie wir das im Anhang eingehend besprechen werden.

Es soll nun die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + X_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = \int d\Phi_1 \int g w \{ f' f'_1 (1-f)(1-f_1) - f f_1 (1-f')(1-f'_1) \} \quad (1.6)$$

näher betrachtet werden. [In (1.6) haben wir zur Abkürzung die Argumente von f nicht hingeschrieben, sondern den Index an die Funktion gesetzt.] Im Falle des Gleichgewichtes ohne äußere Kraft ist f vom Ort x, y, z und der Zeit t unabhängig. Wenn wir die Temperatur mit T , die Dichte mit ϱ und die Massengeschwindigkeit mit u bezeichnen, dann sind T , ϱ und u dementsprechend örtlich und zeitlich konstant. In diesem Falle kennen wir schon die Lösung von (1.6). Sie ist nämlich die Fermische Gleichgewichtsverteilung:

$$f^{(0)} = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{2m}{kT}(v_\alpha - u_\alpha)(v_\alpha - u_\alpha)} + 1}, \quad (1.7)$$

wo k die Boltzmannsche Konstante, m die Masse des Teilchens und A eine Konstante ist, die sich als Funktion von gegebenen ϱ , T und u ausdrücken läßt durch die Beziehung:

$$\varrho = m \int f^{(0)} d\Phi. \quad (1.8)$$

Wenn die Temperatur, Dichte und Geschwindigkeit von Ort zu Ort verschieden sind und sich zeitlich ändern, genügt es zwar nicht, daß man einfach in (1.7) die Parameter T , u und A als Funktionen von Ort und Zeit betrachtet, sondern es muß auch die Form der Verteilung selbst modifiziert werden, da in diesem Falle (1.7) nicht mehr die Lösung von (1.6) ist. Diese Modifikation wird aber klein sein, sofern die Änderung solcher Größen räumlich wie zeitlich langsam vor sich geht. Wir setzen also

$$\left. \begin{aligned} f &= f^{(0)} + f^{(1)}, \\ f^{(1)} &= f^{(0)} (1 - f^{(0)}) \chi \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

und nehmen an, daß $f^{(1)}$ klein ist. Durch Einsetzen von (1.9) in (1.6) und unter Vernachlässigung der kleineren Glieder ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_\alpha} + X_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_\alpha} \\ &= - \int d\Phi_1 \int g w d\Omega f^{(0)} f_1^{(0)} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) (\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Die Lösung von (1. 10) ist nicht eindeutig, denn zu einer Lösung kann jede beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$0 = \int d\Phi_1 \int g w d\Omega f^{(0)} f_1^{(0)} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) (\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1) \quad (1. 11)$$

addiert werden. Alle diejenigen Funktionen der Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten, die die dynamischen Größen darstellen, die beim Zusammenstoß erhalten bleiben, erfüllen diese homogene Gleichung, da für solche Funktionen der Ausdruck $\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1$ verschwindet. Wir erhalten also fünf unabhängige Lösungen von (1. 11):

$$\chi_a = 1, \quad \chi_b = v_x, \quad \chi_c = v_y, \quad \chi_d = v_z, \quad \chi_e = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad (1. 12)$$

die bis auf die konstanten Faktoren der Reihe nach Masse, Impulskomponenten und kinetische Energie darstellen. Man kann ferner beweisen, daß (1. 11) keine weiteren unabhängigen Lösungen hat. Um nun die Lösung der Gleichung (1. 10) eindeutig zu bestimmen, normieren wir sie durch die Nebenbedingungen:

$$\int \chi_s f^{(1)} d\Phi = \int \chi_s f^{(0)} (1 - f^{(0)}) \chi d\Phi = 0, \quad s = a, b, c, d, e. \quad (1. 13)$$

Die physikalische Bedeutung dieser Bedingungen ist die, daß die Parameter T, ρ, u_x, u_y und u_z immer noch als Temperatur, Dichte und Geschwindigkeitskomponenten der Massenbewegung interpretiert werden können.

Wenn wir nun die Gleichung (1. 10) umrechnen, indem wir (1. 7) in ihre rechte Seite eintragen, so erhalten wir nach Uehling und Uhlenbeck¹⁾:

$$-\frac{(h/m)^3 c^2}{\sqrt{2} A} \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{T} \xi_a \frac{\partial T}{\partial x_a} \left(\tau^2 - \frac{5}{2} \frac{m p}{\rho k T} \right) + \left(\xi_a \xi_\beta - \frac{\tau^2}{3} \delta_{a\beta} \right) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_a} \right) \right\} = J(\chi) \quad (1. 14)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{m}{2 k T}, \\ \xi_i &= \sqrt{c} (v_i - u_i), \quad i = x, y \text{ und } z, \\ \tau^2 &= \xi_a \xi_a, \\ J(\chi) &= \frac{1}{A^2} \int d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \\ &\quad \int d\Omega \gamma w \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma, \vartheta \right) f^{(0)} f_1^{(0)} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) (\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1), \\ \gamma &= \sqrt{\frac{c}{2}} g. \end{aligned} \right\} \quad (1. 15)$$

¹⁾ E. A. Uehling u. G. E. Uhlenbeck, l. c. Gleichung (30).

Wegen der Linearität von J können wir die Lösung von (1.14) in die Form setzen:

$$\chi = -\frac{c^{3/2}}{\sqrt{2}A} \left(\frac{h}{m}\right)^3 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_a} \pi_a - \frac{c^2}{\sqrt{2}A} \left(\frac{h}{m}\right)^3 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_a}\right) \pi_{a\beta}, \quad (1.16)$$

worin die π diejenigen Lösungen der Gleichungen

$$\frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \xi_i \left(\tau^2 - \frac{5}{2} \frac{m p}{\rho k T} \right) = J(\pi_i) \quad (1.17)$$

und

$$\frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \left(\xi_i \xi_j - \frac{\tau^2}{3} \delta_{ij} \right) = J(\pi_{ij}) \quad (1.18)$$

sind, die die Nebenbedingungen

$$\int \chi_s f^{(0)} (1 - f^{(0)}) \pi d\xi d\eta d\zeta = 0, \quad s = a, b, c, d, e. \quad (1.19)$$

erfüllen. Es zeigt sich ferner, daß die π die Form haben müssen:

$$\left. \begin{aligned} \pi_i &= \xi_i F_a(\tau^2), \\ \pi_{ij} &= \left(\xi_i \xi_j - \frac{\tau^2}{3} \delta_{ij} \right) F_b(\tau^2), \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

wo F_a und F_b Funktionen von τ^2 allein sind, und daß F_a der Nebenbedingung

$$\int f^{(0)} (1 - f^{(0)}) F_a(\tau^2) \tau^4 d\tau = 0, \quad (1.21)$$

genügen muß, damit die π_i die Bedingung (1.19) erfüllen können, während für F_b keine solche Bedingung hinzugefügt werden muß, denn bei F_b folgen aus (1.20) automatisch die Gleichungen (1.19).

Die Lösung π_i bzw. π_{ij} der Gleichung (1.17) bzw. (1.18) ist nun für die Wärmeleitfähigkeit und Zähigkeit maßgebend. Die Wärmeleitfähigkeit κ bzw. die Zähigkeit η wird nämlich durch folgende Gleichung gegeben¹⁾:

$$\kappa = \frac{4k}{m} (mkT)^{1/2} [\pi_i, \pi_i] \quad (1.22)$$

bzw.

$$\eta = 6 (mkT)^{1/2} [\pi_{ij}, \pi_{ij}], \quad (1.23)$$

wobei der Klammerausdruck folgende Bedeutung hat:

$$[A, B] = \int d\xi d\eta d\zeta A J(B). \quad (1.24)$$

Man kann zwar die Gleichungen (1.17) und (1.18) nicht genau lösen, aber die Auflösung dieser Gleichung ist derjenigen einer Minimalaufgabe gleich-

¹⁾ E. A. Uehling u. G. E. Uhlenbeck, l. c. Gleichung (43) und (46). Ihr Resultat ist hier mit dem Faktor 4 multipliziert, da es sich hier um eine Mischung von vier Gasarten handelt.

wertig, deren angenäherte Lösung man immerhin verhältnismäßig leicht finden kann. Es sollen nämlich diejenigen Funktionen h_i bzw. k_{ij} gesucht werden, die den Ausdruck

$$H = -2 \int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \xi_i \left(\tau^2 - \frac{5}{2} \frac{m p}{\rho k T} \right) h_i d\xi d\eta d\zeta + [h_i, h_i] \quad (1.25)$$

bzw.

$$K = -2 \int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \left(\xi_i \xi_j - \frac{\tau^2}{3} \delta_{ij} \right) k_{ij} d\xi d\eta d\zeta + [k_{ij}, k_{ij}] \quad (1.26)$$

zum Minimum machen, dabei müssen aber die h_i den Nebenbedingungen genügen:

$$\int \chi_s f^{(0)} (1 - f^{(0)}) h_i d\xi d\eta d\zeta = 0, \quad s = a, b, c, d, e. \quad (1.27)$$

Die Funktionen h_i bzw. k_{ij} sind dann die Lösungen der Gleichung (1.17) bzw. (1.18)¹⁾.

Wir benutzen diesen Satz, um (1.17) und (1.18) näherungsweise zu lösen, indem wir nämlich diejenigen Funktionen h bzw. k unter den Funktionen von geeigneter einfacher Form aufsuchen, die H bzw. K zum Minimum machen. In den folgenden drei Abschnitten versuchen wir nun die Minimalaufgabe $\delta H = 0$ zu lösen, um die Wärmeleitfähigkeit des Kerngases zu berechnen. Die entsprechende Aufgabe für die Zähigkeit werde dann in den Abschnitten 5 und 6 behandelt.

2. Die Berechnung von $[h, h]$. Von nun an müssen wir einen anderen Weg einschlagen, als ihn Uehling in seiner Arbeit gegangen ist. Denn es handelt sich hier um ein verhältnismäßig stark entartetes Gas, während bei Uehling die Gasentartung als eine Korrektur eingeführt worden ist. Wir werden aber in diesem Abschnitt das Integral $[h, h]$ allgemein betrachten, ohne diese Voraussetzung einzuführen.

Nach (1.20) soll h die Form haben:

$$h = \xi F(\tau^2), \quad (2.1)$$

wo F eine Funktion von τ^2 allein ist. Tragen wir (2.1) in (1.24) ein, so erhalten wir

$$[h, h] = \frac{1}{A^2} \int d\xi d\eta d\zeta \int d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \int \gamma w d\Omega f^{(0)} f_1^{(0)} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) (\xi F + \xi_1 F_1 - \xi' F' - \xi_1' F_1'). \quad (2.2)$$

¹⁾ E. A. Uehling, l. c.

Als Abkürzungen führen wir nun folgende Größen ein:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v} && \text{Relativgeschwindigkeit vor dem Zusammenstoß,} \\ \mathbf{g}' &= \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}' && \text{Relativgeschwindigkeit nach dem Zusammenstoß,} \\ \mathbf{l} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) && \text{Geschwindigkeit des Schwerpunktes,} \\ l &= |\mathbf{l}|, \\ \Theta, \delta, &&& \text{Polarwinkel und Azimut des Vektors } \mathbf{l} \text{ in bezug auf ein raum-} \\ &&& \text{festes Koordinatensystem,} \\ \alpha, \varepsilon, &&& \text{Polarwinkel und Azimut des Vektors } \mathbf{g} \text{ in bezug auf den} \\ &&& \text{Vektor } \mathbf{l} \text{ (siehe Fig. 1),} \\ \alpha', \varepsilon' &&& \text{Polarwinkel und Azimut des Vektors } \mathbf{g}' \text{ in bezug auf den} \\ &&& \text{Vektor } \mathbf{l}, \\ \lambda &= \sqrt{2} c l. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

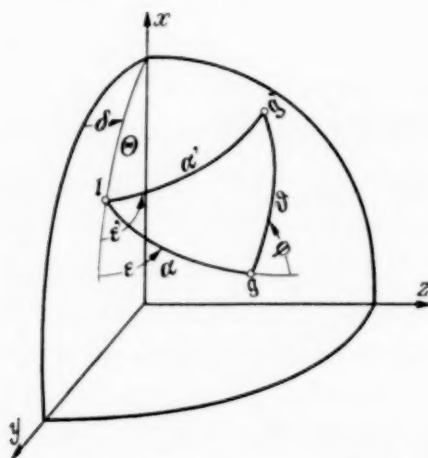


Fig. 1. Drei Vektoren \mathbf{l} , \mathbf{g} und \mathbf{g}' .

Wir nehmen nun als Integrationsvariable statt $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \xi_1, \vartheta$ und φ die acht Größen $\alpha, \varepsilon, \alpha', \varepsilon', \Theta, \delta, \gamma$ und λ auf. Dabei besteht die Beziehung:

$$\begin{aligned} d\xi d\eta d\zeta d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\Omega \\ = \gamma^2 d\gamma \lambda^2 d\lambda \sin \alpha d\alpha d\varepsilon \sin \alpha' d\alpha' d\varepsilon' \sin \Theta d\Theta d\delta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wir haben ferner:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\lambda - \gamma \cos \alpha) \cos \Theta + \gamma \sin \alpha \sin \Theta \cos \varepsilon\}, \\ \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\lambda + \gamma \cos \alpha) \cos \Theta - \gamma \sin \alpha \sin \Theta \cos \varepsilon\}, \\ \tau^2 &= \frac{1}{2} (\lambda^2 + \gamma^2 - 2 \gamma \lambda \cos \alpha), \\ \tau_1^2 &= \frac{1}{2} (\lambda^2 + \gamma^2 + 2 \gamma \lambda \cos \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

und die entsprechenden Ausdrücke für ξ' , ξ_1' , τ'^2 , $\tau_1'^2$, die nur dadurch von (2.5) verschieden sind, daß bei ihnen die Größe α' an Stelle von α vorkommt. Der Winkel ϑ läßt sich durch α, ε und α', ε' darstellen:

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \cos (\varepsilon - \varepsilon'). \quad (2.6)$$

Setzen wir diese Beziehungen in (2.2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} [h, h] = & \frac{1}{A^2} \int_0^\infty d\gamma \gamma^3 \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha f^{(0)} f_1^{(0)} \int_0^\pi d\alpha' \sin \alpha' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \\ & \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{2\pi} d\varepsilon \xi F \left\{ (\xi F + \xi_1 F_1) \int_0^{2\pi} w d\varepsilon' - F' \int_0^{2\pi} w \xi' d\varepsilon' \right. \\ & \left. - F_1' \int_0^\pi w \xi_1' d\varepsilon' \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zuerst muß die Integration über ε' ausgeführt werden; dabei ergeben sich Integrale von der Form:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int_0^{2\pi} w \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma, \vartheta \right) d\varepsilon', \\ I' &= \int_0^{2\pi} w \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma, \vartheta \right) \xi' d\varepsilon', \\ I_1 &= \int_0^{2\pi} w \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma, \vartheta \right) \xi_1' d\varepsilon'. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Diese können wir berechnen, indem wir w in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$w \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma, \vartheta \right) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) P_l (\cos \vartheta) \quad (2.9)$$

und beachten, daß nach dem Summensatz der Kugelfunktionen unter Berücksichtigung von (2.6) die Gleichung besteht:

$$\begin{aligned} P_l (\cos \vartheta) &= P_l (\cos \alpha) P_l (\cos \alpha') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{m=l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m (\cos \alpha) P_l^m (\cos \alpha') \cos m (\varepsilon - \varepsilon'). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Das Resultat lautet:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= 2\pi\sigma\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right), \\ I' &= 2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - \gamma\cos\alpha')\cos\Theta \cdot \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sin\alpha'\sin\Theta\cos\varepsilon \cdot \sigma^{(1)}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right)\right], \\ I_1 &= 2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + \gamma\cos\alpha')\cos\Theta \cdot \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sin\alpha'\sin\Theta\cos\varepsilon \cdot \sigma^{(1)}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right)\right], \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

worin σ und $\sigma^{(1)}$ definiert werden durch

$$\left. \begin{aligned} \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma\right) P_l(\cos\alpha) P_l(\cos\alpha'), \\ \sigma^{(1)}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l \left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma\right)}{l(l+1)} P_l^1(\cos\alpha) P_l^1(\cos\alpha'). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Nachdem wir (2.11) in (2.7) eingetragen haben, integrieren wir über ε , Θ und δ . Es folgt dann:

$$\begin{aligned} [h, h] &= \frac{8\pi^3}{3A^2} \int d\gamma \gamma^3 \int d\lambda \lambda^2 \int d\alpha \sin\alpha f^{(0)} f_1^{(0)} \int d\alpha' \sin\alpha' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \\ &\quad \cdot [(\lambda - \gamma\cos\alpha) \{(\lambda - \gamma\cos\alpha) F + (\lambda + \gamma\cos\alpha) F_1 - (\lambda - \gamma\cos\alpha') F' \\ &\quad - (\lambda + \gamma\cos\alpha') F'_1\} F\sigma + \gamma^2 \sin\alpha \{ \sigma \sin\alpha \cdot (F - F_1) - \sigma^{(1)} \sin\alpha' \\ &\quad \cdot (F' - F'_1) \} F]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es zeigt sich dabei, daß man in der Summe in (2.12) die Glieder mit ungeradem l weglassen kann. Denn in (2.13) verschwinden beim Integrieren über α' alle derartigen Glieder, weil einerseits die Koeffizienten von σ in (2.13) gerade Funktionen von $\cos\alpha'$ sind, und die Koeffizienten von $\sigma^{(1)}$ ungerade Funktionen sind, andererseits aber die Glieder mit ungeradem l in σ ungerade Funktionen und in $\sigma^{(1)}$ gerade Funktionen von $\cos\alpha'$ sind.

Bis hierher haben wir gar nicht die Voraussetzung benutzt, daß das Gas stark entartet ist. Die weiteren Rechnungen lassen sich nun vereinfachen, wenn wir dieser Tatsache Rechnung tragen.

3. Fall der starken Entartung. Mit der Bezeichnung

$$\log A = \tau_0^2 \quad (3.1)$$

folgt aus (1.7)

$$f^{(0)}(\tau) = \frac{1}{e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1} \quad (3.2)$$

δ sei die Halbwertsbreite der Exponentialfunktion. Dann lautet die Bedingung für die starke Entartung:

$$\tau_0^2 \gg \delta, \quad (3.3)$$

die beim Kerngas immer angenähert erfüllt ist; denn $kT \tau_0^2$ ist die maximale Energie E_0 der Fermi-Verteilung, und diese beträgt beim Kerngas ungefähr 20 MEV., während kT unter gewöhnlichen Umständen stets unter einigen MEV. bleibt.

Der Faktor $f^{(0)} f_1^{(0)} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'})$ im Integrand von (2.13) ist nun nur dann wesentlich von Null verschieden, wenn die Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} \tau^2 &< \tau_0^2 + \delta, & \tau'^2 &> \tau_0^2 - \delta, \\ \tau_1^2 &< \tau_0^2 + \delta, & \tau_1'^2 &> \tau_0^2 - \delta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

gleichzeitig bestehen. Mit (2.5) zusammengefaßt entstehen daraus

$$\left. \begin{aligned} -2\delta &< \gamma \lambda \cos \alpha < 2\delta, \\ -2\delta &< \gamma \lambda \cos \alpha' < 2\delta, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

und

$$2(\tau_0^2 - \delta) < \lambda^2 + \gamma^2 < 2(\tau_0^2 + \delta). \quad (3.6)$$

Die letztere Beziehung zeigt, daß $\lambda^2 + \gamma^2$ sehr groß sein muß:

$$\lambda^2 + \gamma^2 \sim 0(\tau_0^2) \gg \delta. \quad (3.7)$$

Man kann aus (3.7) zwar nicht schließen, daß γ^2 und λ^2 einzeln sehr groß sein müssen, aber das Gebiet der $\gamma^2 \lambda^2$ -Ebene, in dem γ^2 und λ^2 einzeln sehr groß sind, ist sehr groß, falls ihre Summe sehr groß ist. Das Gebiet, in dem γ^2 und λ^2 einzeln nicht sehr groß sind, ist in der Tat so klein, daß es fast gar nicht zum Integral (2.13) beiträgt. Dabei ist allerdings angenommen, daß σ und $\sigma^{(1)}$ sowie die unbekannte Funktion F nicht allzu stark in diesem Gebiet anwachsen. Es kommt also nur dasjenige Gebiet in Frage, in dem statt (3.7) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &\sim 0(\tau_0^2), \\ \lambda^2 &\sim 0(\tau_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

einzeln erfüllt sind. In diesem Gebiet sind aber $\cos \alpha$ und $\cos \alpha'$ wegen (3.5) sehr klein und können gegen 1 vernachlässigt werden. Diese Tatsache

bedeutet physikalisch, daß nur solche Zusammenstöße maßgebend sind, bei denen der Betrag der Geschwindigkeit zweier Teilchen vor dem Stoß, sowie nach dem Stoß in der Nähe der Fermischen Abfallstelle liegt; das heißt also nur diejenigen Zusammenstöße wichtig sind, bei denen all diese Geschwindigkeiten ungefähr denselben Betrag haben, so daß die zwei Vektoren \mathbf{g} und \mathbf{g}' ungefähr senkrecht zum Vektor \mathbf{l} stehen. Wir dürfen auf diese Weise in σ und in $\sigma^{(1)}$ $\cos \alpha = 0$, $\cos \alpha' = 0$ setzen, $\gamma \cos \alpha$ und $\gamma \cos \alpha'$ gegen λ vernachlässigen und $\sin \alpha$ und $\sin \alpha'$ einfach durch 1 ersetzen. Dadurch vereinfacht sich (2.13) bedeutend. Es ergibt sich nämlich

$$[h, h] = \frac{8\pi^3}{3A^2} \int d\gamma \cdot \gamma^3 \bar{\sigma} \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) \int d\lambda \cdot \lambda^2 \int d\alpha \sin \alpha f^{(0)} f_1^{(0)} \cdot \int d\alpha' \sin \alpha' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) F \{ \lambda^2 (F + F_1 - F' - F'_1) + \gamma^2 (F - F_1) \}, \quad (3.9)$$

worin $\bar{\sigma}$ definiert wird durch

$$\bar{\sigma} \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) = \sum_{\text{gerade}} c_l \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) \{ P_l(0) \}^2. \quad (3.10)$$

Das Glied, das in (2.13) $\sigma^{(1)}$ enthielt, kommt in (3.9) nicht mehr vor, da $\sigma^{(1)}$ verschwindet, wenn man darin $\cos \alpha = 0$ setzt.

Es empfiehlt sich jetzt, neue Variablen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (\gamma^2 + \lambda^2) - \tau_0^2, \\ x &= \gamma \lambda \cos \alpha, \\ x' &= \gamma \lambda \cos \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Dann folgt

$$[h, h] = \frac{8\pi^3}{3A^2} \int_0^\infty d\gamma \cdot \gamma \bar{\sigma} \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) \int_{1/2(2\tau_0^2 - \gamma^2)}^\infty \frac{dp}{\sqrt{2p + 2\tau_0^2 - \gamma^2}} \int_{-\gamma\lambda}^{\gamma\lambda} dx f^{(0)} f_1^{(0)} \cdot \int_{-\gamma\lambda}^{\gamma\lambda} dx' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) F \{ (2p + 2\tau_0^2 - \gamma^2) (F + F_1 - F' - F'_1) + \gamma^2 (F - F_1) \}. \quad (3.12)$$

Hier muß aber beachtet werden, daß einerseits $2\tau_0^2 - \gamma^2$ im wichtigen Gebiet von der Größenordnung von τ_0^2 ist, während andererseits p von der Größenordnung δ ist. Wir können also in (3.12) p gegen $2\tau_0^2 - \gamma^2$ vernachlässigen. Das Integrationsgebiet in der γp -Ebene ist in Fig. 2 schraffiert dargestellt. Da aber der Integrand nur in einer Zone der Breite δ

der γ -Achse entlang wesentlich von Null verschieden ist, können wir das Gebiet durch ein einfacheres

$$\left. \begin{aligned} -\infty < p < \infty \\ 0 < \gamma < \sqrt{2} \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ersetzen. Wir können ferner die Integrationsgrenze $\gamma\lambda$ und $-\gamma\lambda$ durch ∞ und $-\infty$ ersetzen, ohne einen großen Fehler zu begehen. Auf diese Weise erhalten wir

$$[h, h] = \frac{8\pi^3}{3A^2} \int_0^{\sqrt{2}\tau_0} d\gamma \frac{\gamma \bar{\sigma}}{\sqrt{2\tau_0^2 - \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^{(0)} f_1^{(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \cdot F \{ (2\tau_0^2 - \gamma^2) (F + F_1 - F' - F'_1) + \gamma^2 (F - F_1) \}. \quad (3.14)$$

Wir müssen nun für F eine geeignete Form wählen, um die Minimumaufgabe $\delta H = 0$ mit Hilfe der Ritzschen Methode näherungsweise zu lösen. Aus der Symmetrieeigenschaft der Fermi-Verteilung in bezug auf die Abfallstelle τ_0^2 zusammengefaßt mit der Nebenbedingung (1.21) liest man ab, daß F im Falle der starken Entartung eine ungerade Funktion von $\tau^2 - \tau_0^2$ sein muß. Der weitere Verlauf von F ist leider durch solche rein qualitativen Überlegungen schwierig zu erraten. Das Verhalten der Funktion in großer Entfernung vom Punkt τ_0^2 ist allerdings unwesentlich. Wir setzen daher als allereinfachste Näherung folgendermaßen an:

$$\left. \begin{aligned} F &= a (\tau^2 - \tau_0^2), \\ &= a (p - x), \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

wobei die Konstante a der Variationsparameter ist, der nachher so bestimmt werden soll, daß H zum Minimum wird. Durch Einsetzen von (3.15) in (3.14) ergibt sich

$$[h, h] = \frac{16\pi^3 a^2}{3A^2} \int_0^{\sqrt{2}\tau_0} d\gamma \frac{\gamma^3 \bar{\sigma}}{\sqrt{2\tau_0^2 - \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} K'_0 K_2 dp \quad (3.16)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} K'_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) dx' = e^p \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh p + \cosh x}, \\ K_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(0)} f_1^{(0)} x^2 dx = e^{-p} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh p + \cosh x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

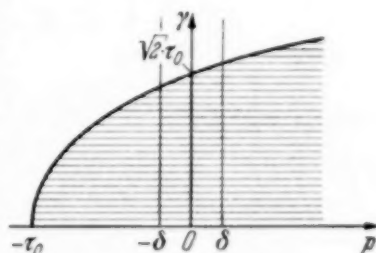


Fig. 2. Integrationsgebiet in der γp -Ebene.

Diese beiden Integrale kann man analytisch ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{2 p e^p}{e^p - e^{-p}}, \\ K_2 &= \frac{2}{3} \frac{(p^2 + \pi^2) p e^{-p}}{e^p - e^{-p}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Jetzt ist noch das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} K_0' K_2 dp$ zu berechnen. Dieses läßt sich in geschlossener Form darstellen mittels der Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(e^x - e^{-x})^2} dx = \frac{\pi^{2n}}{4} B_{2n-1}, \quad (3.19)$$

wobei B die Bernoullische Zahl bedeutet. Es besteht nämlich die Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0' K_2 dp = \frac{2 \pi^4}{3} (B_3 + B_1) = \frac{8 \pi^4}{63}. \quad (3.20)$$

Tragen wir dies in (3.16) ein, und definieren wir den „effektiven Stoßquerschnitt“ Q_1 durch

$$Q_1 = \int_0^1 \frac{x^3 \bar{\sigma} \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{c}} x \right)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.21)$$

so erhalten wir schließlich

$$[h, h] = \frac{256 \sqrt{2} \pi^7 a^2}{189 A^2} \tau_0^3 Q_1. \quad (3.22)$$

4. *Wärmeleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen.* Wir betrachten nun das erste Integral in (1.25). Dabei beachten wir zuerst, daß sich die Größe $\frac{5}{2} \frac{m p}{\varrho k T}$ folgendermaßen darstellen läßt¹⁾:

$$\frac{5}{2} \frac{m p}{\varrho k T} = \frac{5}{2} \frac{G_{3/2}(\tau_0)}{G_{1/2}(\tau_0)}, \quad (4.1)$$

wenn wir die Funktion $G_n(\tau_0)$ definieren durch die Gleichung²⁾:

$$\left. \begin{aligned} G_n(\tau_0) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^{x-\tau_0^2} + 1} dx \\ &= \frac{\tau_0^{2n+2}}{\Gamma(n+2)} + \frac{\pi^2}{6} \frac{\tau_0^{2n-2}}{\Gamma(n)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

¹⁾ E. A. Uehling u. G. E. Uhlenbeck, l. c. Gleichung (60). — ²⁾ A. Sommerfeld, ZS. f. Phys. 47. 1, 1928.

Wir sehen daraus, daß sich $\frac{5}{2} \frac{mp}{\varrho k T}$ bei tiefen Temperaturen einfach auf τ_0^2 reduziert:

$$\frac{5}{2} \frac{mp}{\varrho k T} = \tau_0^2 + 0(\tau_0^{-2}). \quad (4.3)$$

Wir müssen nun das Integral

$$\int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} (\tau^2 - \tau_0^2) \tau^4 F d\tau = a \int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} (\tau^2 - \tau_0^2)^2 \tau^4 d\tau \quad (4.4)$$

berechnen. Wir können dies, indem wir die Beziehung benutzen:

$$\frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} = -\frac{1}{2A} \frac{1}{\tau} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \tau}. \quad (4.5)$$

Wir können nämlich (4.4) durch partielle Integration als Summe von G darstellen:

$$\left. \begin{aligned} & \int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} (\tau^2 - \tau_0^2)^2 \tau^4 d\tau \\ &= \frac{1}{2A} \left\{ \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) G_{5/2} - 2\tau_0^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) G_{3/2} + \tau_0^4 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) G_{1/2} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{6A} \tau_0^3 + 0(\tau_0^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

H ist jetzt durch (3.22) und (4.6) folgendermaßen auszudrücken:

$$H = -\frac{4\pi^3 a}{9A} \tau_0^3 + \frac{256\sqrt{2}\pi^7 a^2}{189A^2} \tau_0^3 Q_1. \quad (4.7)$$

Der Parameter a kann dann aus der Minimumbedingung $\partial H/\partial a = 0$ bestimmt werden:

$$a = \frac{21A}{128\sqrt{2}\pi^4 Q_1}. \quad (4.8)$$

und mit diesem Wert von a ergibt sich:

$$[\pi_x, \pi_x] = [h, h]_a = \frac{7}{192\sqrt{2}\pi Q_1} \tau_0^3. \quad (4.9)$$

Bezeichnen wir nun die Fermische Maximalenergie mit E_0 , so daß die Beziehung besteht:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{E_0}{kT}}, \quad (4.10)$$

und tragen wir (4. 9) und (4. 10) in (1. 22) ein, so gewinnen wir schließlich die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{7}{48} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E_0^{3/2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{T} \frac{1}{Q_1}. \quad (4. 11)$$

Der effektive Stoßquerschnitt Q_1 läßt sich analytisch nicht ausrechnen, da die Geschwindigkeiten der Kernbausteine im Gebiet liegen, wo die entsprechenden Wellenlängen mit der Reichweite der Kräfte zwischen den Kernbausteinen vergleichbar sind. Wir haben daher Q_1 numerisch berechnet. Wenn wir für die Kernkräfte und für die Fermische Maximalenergie E_0 die üblichen Werte annehmen, erhalten wir

$$Q_1 = 2,17 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2. \quad (4. 12)$$

Die Rechnung findet man in Anhang.

Die Wärmeleitfähigkeit des Fermi-Gases ändert sich nach (4. 11) bei tiefen Temperaturen umgekehrt proportional zu T . Sie wächst also mit der abnehmenden Temperatur unendlich an. Diesen Sachverhalt kann man wohl so deuten, daß sich die Anzahl der möglichen Zusammenstöße bei tiefen Temperaturen wegen des Paulischen Prinzips stark vermindert, und daß demzufolge die mittlere freie Weglänge sehr groß wird. Wegen des Paulischen Prinzips können nämlich nur solche Teilchen durch Zusammenstöße ihre Zustände ändern, deren Geschwindigkeitsvektoren in einer Kugelschale vom Radius $\sqrt{\frac{2 E_0}{m}}$ und der Dicke $\frac{k T}{\sqrt{2 m E_0}}$ liegen.

Die Anzahl der Zusammenstöße muß dementsprechend ungefähr um den Faktor $(k T/E_0)^2$ gegenüber dem nichtentarteten Fall kleiner werden. Die mittlere freie Weglänge, die wir mit Λ bezeichnen, wird also gegenüber dem klassischen Wert um den Faktor $(E_0/k T)^2$ größer sein:

$$\Lambda \approx \frac{1}{N Q_1} \left(\frac{E_0}{k T} \right)^2, \quad (4. 13)$$

wo N die Anzahl der Moleküle im Einheitsvolumen bedeutet. Λ wächst daher mit abnehmender Temperatur umgekehrt proportional zu T^2 an. Wenn wir uns nun an die klassische Beziehung zwischen κ und Λ erinnern:

$$\kappa \approx \frac{1}{3} \varrho C_v \bar{v} \Lambda, \quad (4. 14)$$

wobei ρ die Dichte, C_v die spezifische Wärme des Gases und \bar{v} die mittlere Molekülgeschwindigkeit bedeutet, und wenn wir für C_v und \bar{v} die Ausdrücke für das entartete Fermi-Gas eintragen:

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{\pi^2}{2} \frac{k^2 T}{m E_0} {}^1), \\ \bar{v} &\approx \sqrt{2 E_0 / m}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

so erhalten wir tatsächlich die Gleichung, die bis auf den numerischen Faktor mit der Gleichung (4.11) übereinstimmt.

Daß der Atomkern bei tiefen Temperaturen eine große Wärmeleitfähigkeit haben wird, kann man qualitativ auch durch folgende Überlegung plausibel machen. Der Zustand des Atomkerns, in dem die Temperatur ungleichmäßig verteilt ist, wird nur durch Überlagerung vieler stationärer Zustände konstruiert. Wenn die Anregung des Kerns so groß ist, daß die Anregungsenergie schon in dem Gebiet liegt, in dem die Energieniveaus sehr dicht beieinander liegen, kann man dieses Wellenpaket konstruieren, wenn man nur solche stationären Zustände überlagert, deren Energie nicht sehr viel von der Anregungsenergie verschieden ist; denn hier sind wegen der großen Niveaudichte genügend viele Zustände vorhanden, um das Wellenpaket konstruieren zu können. Wenn die Anregung aber klein ist, muß sich das Wellenpaket aus Zuständen größerer Energiedifferenzen zusammensetzen, was im allgemeinen auch zu einer schnellen Verschmierung des Paketes führt.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch kurz besprechen, wie die Verteilung f selbst durch die Temperaturunhomogenität modifiziert wird. Wir nehmen einfachheitshalber an, daß die Temperatur nur in der x -Richtung einen konstanten Gradienten hat:

$$T = bx, \quad b > 0. \quad (4.16)$$

Die modifizierte Verteilung läßt sich nun nach (1.9), (1.16), (1.20), (3.15) und (4.8) in die Form schreiben:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \frac{1}{e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1} - \text{Const} \frac{e^{\tau^2 - \tau_0^2}}{(e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1)^2} \xi(\tau^2 - \tau_0^2), \quad (4.17)$$

wobei

$$\text{Const} = \frac{21}{512 \sqrt{2} \pi^4} \frac{b h^3}{m^{3/2} k^{3/2}} \frac{1}{Q_1} \frac{1}{T^{5/2}}. \quad (4.18)$$

¹⁾ Z. B. H. Bethe, Rev. of Mod. Phys. 9, 71, 1937, Gleichung (296).

Da der Faktor $\frac{e^{\tau^2 - \tau_0^2}}{(e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1)^2}$ nur in der Nähe von $\tau^2 = \tau_0^2$ wesentlich von Null verschieden ist, wird nur die Verteilung in diesem Gebiet modifiziert. Ferner tritt eine Abweichung von der Kugelsymmetrie hinzu; der Temperaturgradient wirkt nämlich auf die Verteilung so, daß in der rechten Hälfte des ξ, ζ -Raumes (angenommen, daß wir die ξ - und x -Achse nach rechts gelegt haben) die Zahl der Teilchen, die kleinere Geschwindigkeiten als τ_0 haben, sich vermehrt, und die Zahl der Teilchen, die größere Geschwindigkeiten als τ_0 haben, sich vermindert, während sich in der linken Hälfte die schnelleren Teilchen vermindern, und die langsameren vermehren.

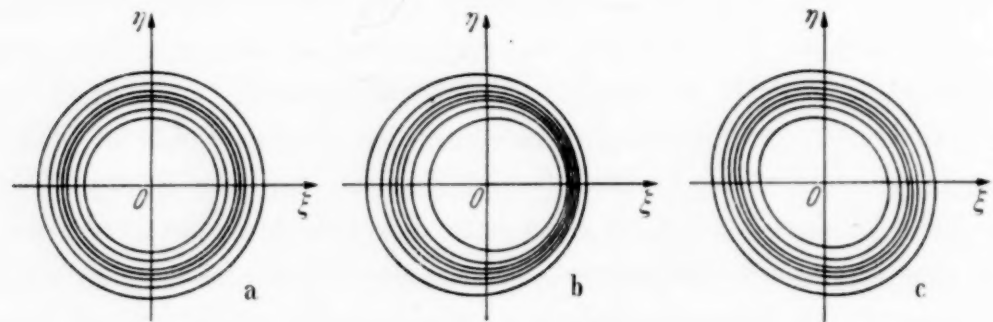


Fig. 3 a. Kurven konstanten Wertes von f (qualitativ). Ohne Temperatur- und Geschwindigkeitsgradient.

Fig. 3 b. Dieselben mit Temperaturgradient in der x -Richtung. Die Temperatur ist proportional zu x .

Fig. 3 c. Dieselben mit laminarer Bewegung in der y -Richtung. Die Geschwindigkeit ist proportional zu x .

Wir können dies veranschaulichen, indem wir den Wert von f etwa für $\zeta = 0$ betrachten. Wir können also die Funktion f anschaulich als Fläche im ξ, τ -Raum darstellen. Wenn wir die „Höhenlinien“ dieser Fläche in die ξ, τ -Ebene bezeichnen, so erhalten wir eine Schar konzentrischer Kreise, wie sie in Fig. 3 a skizziert ist, falls kein Temperaturgradient vorhanden ist. Wenn der Temperaturgradient in der x -Richtung existiert, so sehen die Höhenlinien qualitativ etwa wie Fig. 3 b aus. Daß sich die größeren Kreise nach links und die kleineren nach rechts rücken, ist offenbar so zu deuten, daß die schnellen Teilchen mehr von der rechten Seite, wo die Temperatur höher ist, ins betreffende Volumenelement eintreten, als von der linken Seite, wo die Temperatur tiefer ist, und die langsamen dagegen mehr von der linken als von der rechten eintreten.

5. Die Berechnung von $[k, k]$. In den vorigen Abschnitten haben wir die Wärmeleitfähigkeit des stark entarteten Fermi-Gases berechnet, indem wir das Problem auf die Minimalaufgabe $\delta H = 0$ reduzierten. Wir wollen

jetzt versuchen, die entsprechende Aufgabe $\delta K = 0$ zu lösen, um die Zähigkeit dieses Gases zu finden. Wir müssen zuerst $[k, k]$ berechnen. k soll nun die Form haben:

$$k = (\xi^2 - \frac{1}{3} \tau^2) F(\tau^2), \quad (5.1)$$

wo F eine Funktion von τ^2 allein ist, und wir haben

$$\begin{aligned} [k, k] &= [(\xi^2 - \frac{1}{3} \tau^2) F, (\xi^2 - \frac{1}{3} \tau^2) F] \\ &= [\xi^2 F, \xi^2 F] - \frac{1}{9} [\tau^2 F, \tau^2 F]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wir betrachten nun das Integral $[\xi^2 F, \xi^2 F]$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} [\xi^2 F, \xi^2 F] &= \frac{1}{A^2} \int d\gamma \gamma^3 \int d\lambda \lambda^2 \int d\alpha \sin \alpha f^{(0)} f_1^{(0)} \\ &\quad \int d\alpha' \sin \alpha' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \int d\Theta \sin \Theta \int d\delta \int d\varepsilon \xi^2 F \{ (\xi^2 F \\ &\quad + \xi_1^2 F_1) \int w d\varepsilon' - F' \int w \xi'^2 d\varepsilon' - F_1' \int w \xi_1'^2 d\varepsilon' \}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

und wir müssen die Integrale von der Form berechnen:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int w d\varepsilon', \\ \bar{I}' &= \int w \xi'^2 d\varepsilon', \\ \bar{I}_1' &= \int w \xi_1'^2 d\varepsilon'. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Durch dieselbe Methode wie die vorige erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= 2\pi\sigma \\ \bar{I}' &= 2\pi \left[\left\{ \frac{1}{2} (\lambda - \gamma \cos \alpha')^2 \cos^2 \Theta + \frac{\gamma^2}{4} \sin^2 \alpha' \sin^2 \Theta \right\} \sigma \right. \\ &\quad \left. + \gamma (\lambda - \gamma \cos \alpha') \sin \alpha' \cos \Theta \sin \Theta \cos \varepsilon \cdot \sigma^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{4} \sin^2 \alpha' \sin^2 \Theta \cos 2\varepsilon \cdot \sigma^{(2)} \right], \\ \bar{I}_1' &= 2\pi \left[\left\{ \frac{1}{2} (\lambda + \gamma \cos \alpha')^2 \cos^2 \Theta + \frac{\gamma^2}{4} \sin^2 \alpha' \sin^2 \Theta \right\} \sigma \right. \\ &\quad \left. - \gamma (\lambda + \gamma \cos \alpha') \sin \alpha' \cos \Theta \sin \Theta \cos \varepsilon \cdot \sigma^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2}{4} \sin^2 \alpha' \sin^2 \Theta \cos 2\varepsilon \cdot \sigma^{(2)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Hierin ist $\sigma^{(2)}$ folgendermaßen definiert:

$$\sigma^{(2)}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma, \alpha, \alpha'\right) = \sum_0^\infty \frac{c_l\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma\right)}{(l-1)l(l+1)(l+2)} P_l^2(\cos \alpha) P_l^2(\cos \alpha'). \quad (5.6)$$

Nachdem wir (5.5) in (5.3) eingetragen haben, integrieren wir über ε, θ und δ , und vernachlässigen $\cos \alpha$ und $\cos \alpha'$ gegen 1, was aus demselben Grunde wie vorher erlaubt ist. Dann reduziert sich (5.3) auf eine einfache Form:

$$[\xi^2 F, \xi^2 F] = \left. \begin{aligned} & \frac{4\pi^3}{15A^2} \int d\gamma \gamma^3 \int d\lambda \lambda^2 \int d\alpha \sin \alpha f^{(0)} f_1^{(0)} \\ & \int d\alpha' \sin \alpha' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \cdot F[\bar{\sigma} (3\lambda^4 + 2\lambda^2 \gamma^2 \\ & + 2\gamma^4) (F + F_1 - F' - F_1') + 4\bar{\sigma} \gamma^2 \lambda^2 (F - F_1) \\ & + \gamma^4 \{\bar{\sigma} (F + F_1) - \bar{\sigma}^{(2)} (F' + F_1')\}] \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

mit

$$\bar{\sigma}^{(2)}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma\right) = \sum_{\text{gerade}} \frac{c_l\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\gamma\right)}{(l-1)l(l+1)(l+2)} \{P_l^2(0)\}^2. \quad (5.8)$$

Wir führen hier die Variablen p, x, x' durch (3.11) ein, vernachlässigen p gegen $2\tau_0^2 - \gamma^2$ und modifizieren das Integrationsgebiet. So erhalten wir

$$[\xi^2 F, \xi^2 F] = \left. \begin{aligned} & \frac{4\pi^3}{15A^2} \int_0^{\sqrt{2}\tau_0} d\gamma \frac{\gamma}{\sqrt{2\tau_0^2 - \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^{(0)} f_1^{(0)} \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) \cdot F[\bar{\sigma} \{3(2\tau_0^2 - \gamma^2)^2 \\ & + 2\gamma^2 (2\tau_0^2 - \gamma^2) + 2\gamma^4\} (F + F_1 - F' - F_1') \\ & + 4\bar{\sigma} \gamma^2 (2\tau_0^2 - \gamma^2) (F - F_1) + \gamma^4 \{\bar{\sigma} (F + F_1) \\ & - \bar{\sigma}^{(2)} (F' + F_1')\}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Wir müssen nun eine plausible Form für F wählen. Aus einer zur entsprechenden, in Abschnitt 4 behandelten, völlig analogen Überlegung folgt, daß F bei der starken Entartung eine gerade Funktion von $\tau^2 - \tau_0^2$ sein muß. Weil hier wieder nur das Verhalten der Funktion in der Nähe des Punktes $\tau^2 = \tau_0^2$ wesentlich ist, setzen wir möglichst einfach

$$F = a \quad (5.10)$$

an, wo a der Variationsparameter ist. Es entsteht dann

$$[\xi^2 F, \xi^2 F] = \frac{8 \pi^2 a^2}{15 A^2} \int_0^{\sqrt{2} \tau_0} \frac{\gamma^5 \left\{ \bar{\sigma} \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) - \bar{\sigma}^{(2)} \left(\sqrt{\frac{2}{c}} \gamma \right) \right\}}{\sqrt{2 \tau_0^2 - \gamma^2}} d\gamma \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 K'_0 dp, \quad (5.11)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(0)} f_1^{(0)} dx = \frac{2 p e^{-p}}{e^p - e^{-p}}, \\ K'_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - f^{(0)'}) (1 - f_1^{(0)'}) dx' = \frac{2 p e^p}{e^p - e^{-p}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} K_0 K'_0 dp$ läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0 K'_0 dp = 2 \pi^2 B_1 = \frac{\pi^2}{3}. \quad (5.13)$$

Aus (5.11) und (5.13) folgt nun

$$[\xi^2 F, \xi^2 F] = \frac{32 \sqrt{2} \pi^5 a^2}{45 A^2} \tau_0^5 Q_2, \quad (5.14)$$

wenn wir den effektiven Stoßquerschnitt Q_2 durch

$$Q_2 = \int_0^1 \frac{x^5 \left\{ \bar{\sigma} \left(\frac{2 \tau_0}{\sqrt{c}} x \right) - \bar{\sigma}^{(2)} \left(\frac{2 \tau_0}{\sqrt{c}} x \right) \right\}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (5.15)$$

definieren. Wir müssen noch das Integral $[\tau^2 F, \tau^2 F]$ betrachten. Dieses Integral verschwindet aber, wenn wir darin (5.10) einsetzen. Wir erhalten daher einfach:

$$[(\xi^2 - \frac{1}{3} \tau^2) F_1 (\xi^2 - \frac{1}{3} \tau^2) F] = [\xi^2 F, \xi^2 F] = \frac{32 \sqrt{2} \pi^5 a^2}{45 A^2} \tau_0^5 Q_2. \quad (5.16)$$

6. *Zähigkeit bei tiefen Temperaturen.* Wir betrachten nun das erste Integral in (1. 26). Dazu benutzen wir dasselbe Verfahren, das wir in Abschnitt 4 beschrieben haben. Man erhält:

$$\begin{aligned} \int \frac{f^{(0)2}}{A^2 e^{-\tau^2}} \left(\xi^2 - \frac{\tau^2}{3} \right)^2 a \, d\xi \, d\eta \, d\zeta &= \frac{8\pi a}{45A} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) G_{3/2} \\ &= \frac{8\pi a}{45A} \tau_0^5 + 0(\tau_0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Tragen wir (5. 16) und (6. 1) in (1. 26) ein, so ergibt sich

$$K = -\frac{16\pi a}{45A} \tau_0^5 + \frac{32\sqrt{2}\pi^5 a^2}{45A^2} \tau_0^5 Q_2. \quad (6.2)$$

Der Parameter a kann nun aus der Minimumbedingung $\partial K/\partial a = 0$ bestimmt werden:

$$a = \frac{A}{4\sqrt{2}\pi^4} \frac{1}{Q_2}, \quad (6.3)$$

und für diesen Wert von a folgt:

$$[\pi_{xx}, \pi_{xx}] = [k, k]_a = \frac{2}{45\sqrt{2}\pi^3} \tau_0^5 \frac{1}{Q_2}. \quad (6.4)$$

Setzen wir (6. 4) in (1. 23) ein, so gewinnen wir schließlich die Zähigkeit

$$\eta = \frac{4}{15\sqrt{2}\pi^3} \frac{\sqrt{m} E_0^{5/2}}{(kT)^2} \frac{1}{Q_2}, \quad (6.5)$$

wo Q_2 beträgt:

$$Q_2 = 1,06 \times 10^{-26} \text{ cm}^2,$$

nach der Rechnung, die man im Anhang findet.

Die Zähigkeit des Fermi-Gases ändert sich also bei tiefen Temperaturen umgekehrt proportional zu T^2 und wird daher sehr groß, wenn die Temperatur an Null heranrückt. Die physikalische Folge dieser großen Zähigkeit wird nachher in Abschnitt 7 diskutiert. Hier soll nur erwähnt werden, daß im vorliegenden Falle auch die klassische Beziehung

$$\frac{\kappa}{\eta} = \alpha C_v \quad (6.6)$$

näherungsweise besteht, wobei α eine dimensionslose Konstante von der Größenordnung 1 ist. Wir erhalten nämlich einerseits aus (4. 11) und (6. 5)

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{35}{32} \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\pi^2}{2} \frac{k^2 T}{m E_0}, \quad (6. 7)$$

andererseits ist aber C_v bei tiefen Temperaturen gegeben durch (4. 15):

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} \frac{k^2 T}{m E_0}; \quad (6. 8)$$

der dimensionslose Faktor $35 Q_2/32 Q_1$ hängt von der Temperatur nicht und von der Dichte nur wenig ab. Sein Wert bleibt stets von der Größenordnung 1.

Wie wird nun die Verteilung f durch die Massenbewegung modifiziert werden? Wir wollen uns hier einfachheitshalber vorstellen, daß sich jedes Flüssigkeitselement parallel zur y -Richtung mit einer Geschwindigkeit bewegt, die proportional zu x ist. Die Geschwindigkeitskomponenten u_x , u_y und u_z sind also gegeben durch

$$u_x = u_z = 0, \quad u_y = b x, \quad b > 0. \quad (6. 9)$$

Nach (1. 9), (1. 16), (5. 10) und (6. 3) ergibt sich

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = \frac{1}{e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1} - \text{Const} \frac{e^{\tau^2 - \tau_0^2}}{(e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1)^2} \xi \eta, \quad (6. 10)$$

wobei

$$\text{Const} = \frac{1}{32 \pi^4} \frac{b h^3}{m} \frac{1}{(k T)^2} \frac{1}{Q_2}. \quad (6. 11)$$

Wegen des Faktors $\frac{e^{\tau^2 - \tau_0^2}}{(e^{\tau^2 - \tau_0^2} + 1)^2}$ wird nur die Verteilung in der Nähe der Abfallstelle beträchtlich modifiziert. Ferner wirkt die Massenbewegung auf die Verteilung so, daß im Gebiet, wo $\xi \eta > 0$ ist, die mittlere Geschwindigkeit kleiner wird, und im Gebiet, wo $\xi \eta < 0$ ist, die Geschwindigkeiten im Mittel größer werden. Wenn wir die Verteilungsfunktion durch die Höhenlinien in der $\xi \eta$ -Ebene veranschaulichen, erhalten wir die Höhenlinienkarte, wie sie in Fig. 3c qualitativ skizziert ist. Die kreisförmigen Höhenlinien verzerren sich in der linken Hälfte nach oben und in der rechten Hälfte nach unten. Dies kann man folgendermaßen deuten: In der linken Hälfte der $\xi \eta$ -Ebene häufen sich die Teilchen, die in das betreffende Volumenelement von der rechten Seite, wo das Gas nach oben

fließt, eintreten. Die Geschwindigkeiten der Teilchen in diesem Gebiet richten sich daher mit größeren Wahrscheinlichkeiten nach oben, während es in der rechten Hälfte der $\xi\eta$ -Ebene umgekehrt der Fall ist.

7. *Abklingung der Kernschwingungen.* Wie wir am Ende des Abschnitts 4 besprochen haben, ist der Zustand, in dem die Temperatur irgendwie ungleichmäßig über dem Kern verteilt ist, nicht stationär, sondern er ist durch Überlagerung vieler stationärer Zustände konstruiert. Ebenso ist der Zustand, in dem der Impuls ungleichmäßig verteilt ist — z. B. der Zustand, in dem die Kernmaterie schwingt — nicht stationär, sondern diese Impulsverteilung (oder die Schwingung) wird nach einer Weile vollständig verschmiert. Wenn wir nun den Kern als einen Kristall betrachten, so kommt diese Abklingung der Kernschwingung dadurch zustande, daß durch die Kopplung zwischen den Eigenschwingungen die ihm benachbarten Eigenschwingungen allmählich angeregt werden, bis schließlich die Energie über alle Eigenschwingungen nach dem Planckschen Gesetz verteilt ist. Die einfache Schwingung, die am Anfang im Kern vorhanden war, wird gedämpft, und die Energie verwandelt sich in Wärme. Wenn wir den Kern als Gas betrachten, wie wir das hier getan haben, kommt diese Abklingung durch die Kopplung zwischen der Massen- und inneren Bewegung zustande. Diese Kopplung äußert sich nämlich als innere Reibung, die den Widerstand gegen Scherebewegung bedeutet, und dadurch wird die Schwingung allmählich gebremst und die Energie verwandelt sich in Wärme. Als Anwendung der Überlegungen, die wir in den vorhergehenden Abschnitten ausgeführt haben, werden wir nun die Abklingung der Kernschwingungen vom letzteren Standpunkt aus näher betrachten.

Nach der Hydrodynamik der zähen Flüssigkeit beträgt die Wärmeenergie, die in einer Volumeneinheit pro Zeiteinheit entsteht:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\eta \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right\}. \quad (7.1)$$

Die Schwingungen, für die der Ausdruck in der geschweiften Klammer nicht verschwindet, müssen daher abklingen. Wir wollen nun die Abklingung der Schallwellen betrachten und zeigen, daß die Zähigkeit der Kernmaterie in der Tat sehr groß ist.

Bei einer longitudinalen Schallwelle sind die Geschwindigkeitskomponenten der Schwingung folgendermaßen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a \sin kx \sin 2\pi vt, \\ u_y &= u_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

wo a die Amplitude, k die Wellenzahl und ν die Frequenz ist. In (7.1) eingetragen ergibt sich

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{4\eta}{3} a^2 k^2 \cos^2 kx \sin^2 2\pi \nu t, \quad (7.3)$$

und daraus folgt, daß die mittlere Energiedissipation in einer Volumeneinheit pro Zeiteinheit beträgt

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \frac{\eta}{3} a^2 k^2. \quad (7.4)$$

Da nun aber die mittlere Energiedichte der Schallschwingung gegeben ist durch

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= \varrho \bar{u}^2, \\ &= \frac{1}{4} a^2 \varrho, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

wo ϱ die Dichte bedeutet, so läßt sich, wenn wir die Schallgeschwindigkeit mit v , die Periode mit \tilde{t} bezeichnen, die Abklingungszeit τ in die Form ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\frac{2\bar{E}}{\Delta E}}{\frac{\Delta t}{\Delta t}} = \frac{3}{8\pi^2} \frac{\varrho v^2}{\eta \nu^2}, \\ &= \frac{3}{8\pi^2} \frac{\varrho v^2 \tilde{t}^2}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Die Geschwindigkeit v kann man berechnen, wenn man die Kompressibilität der Kernmaterie kennt. Diese kann man aber abschätzen, indem man annimmt, daß im Kerngas jeweils die Fermische Gleichgewichtsverteilung für die Temperatur Null vorhanden ist. Bethe hat auf diese Weise den Wert

$$v^2 \approx 3,7 \cdot 10^{18} \text{ (cm/sec)}^2 \quad (7.7)$$

gefunden¹⁾.

Für die weitere Diskussion ist es nun zweckmäßig, folgende Einheiten einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Masseneinheit:} \quad m &= 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g (Protonenmasse),} \\ \text{Längeneinheit:} \quad \frac{h}{\sqrt{m E_0}} &= 8,71 \cdot 10^{-13} \text{ cm,} \\ \text{Zeiteinheit:} \quad \frac{h}{E_0} &= 1,92 \cdot 10^{-22} \text{ sec.,} \\ \text{Temperatureinheit:} \quad \frac{E_0}{k} &= 2,47 \cdot 10^{11} \text{ Grad,} \\ &E_0 = 23 \text{ TME (Fermische Grenzenergie).} \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

¹⁾ H. Bethe, l. c. § 53, C.

Die Zähigkeit η ist in diesen Einheiten gegeben durch

$$\eta = 0,44 \frac{1}{T^2}. \quad (7.9)$$

Die Schallgeschwindigkeit v und Dichte ϱ betragen ferner

$$v^2 \approx 0,18, \quad (7.10)$$

$$\varrho \approx 50. \quad (7.11)$$

Tragen wir diese Werte in (7.6) ein, so erhalten wir

$$\tau \approx 0,8 T^2 \tilde{t}^2, \quad (7.12)$$

oder, wenn wir als Maß für die Abklingung das Verhältnis τ/\tilde{t} einführen, bekommen wir

$$\frac{\tau}{\tilde{t}} \approx 0,8 \frac{T^2}{v}. \quad (7.13)$$

Man kann aus (7.13) ersehen, daß das Verhältnis τ/\tilde{t} stets kleiner als 1 ist, außer wenn $T^2/v \gtrsim 1,2$ ist. Da T aber unter gewöhnlichen Umständen stets die Größenordnung $1/10$ hat, so muß v sehr klein sein, damit die Schwingung überhaupt möglich ist. Die Frequenz ν kann aber nicht beliebig klein sein, weil die Wellenlänge der Schallwelle offenbar nicht größer als Kernradius sein kann. Die minimale Frequenz beträgt:

$$\begin{aligned} \nu_{\min} &\approx \text{Schallgeschwindigkeit/Kernradius,} \\ &\approx 0,4. \end{aligned} \quad (7.14)$$

T muß daher selbst für diese langsamste Schwingung schon die Größenordnung 0,7 haben, die eine sehr hohe Temperatur bedeutet. Der Atomkern ist also nach unserem Modell so zäh, daß er fast keiner Schallschwingung fähig ist, außer wenn er erhitzt und sozusagen geschmolzen ist (oder richtiger gesagt, leicht beweglich gemacht ist, weil es sich hier keineswegs um den Übergang zwischen zwei Phasen handelt). Der „Schmelzpunkt“ liegt aber sehr hoch, und je größer die Frequenz ist, um so höher ist sein Wert. Wir können auch feststellen, daß es nicht nur bei Schallschwingungen, sondern auch bei allen Schwingungen, für die der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (7.1) nicht verschwindet (d. h. bei allen Schwingungen, an denen die Formänderung beteiligt) der Fall ist. Der einzige Schwingungstyp, bei dem keine Formänderung vorkommt, und ausnahmsweise keinerlei

Abklingung stattfindet, ist die Schwingung, bei der jedes Flüssigkeitselement in radialer Richtung mit der Geschwindigkeit, die proportional zum Radius ist, schwingt. Der Atomkern kann daher bei gewöhnlichen Temperaturen seine Anregungsenergie nur in Form von Wärme behalten. Dieses Ergebnis entspricht also ganz der Bohrschen Annahme, daß die Bewegung der Kernbausteine im angeregten Zustand eine vollkommen unregelmäßige Wärmebewegung sein muß. Unser Ergebnis zeigt auch, daß die Schwingungen, die nach Bohr¹⁾ beim Kernphotoeffekt eine Rolle spielen, nicht einfach als elastische Schwingungen der Fermi-Gaskugel betrachtet werden können; sondern daß es sich hier offenbar um innere Schwingungen handelt, die mit der Abweichung der Kernmaterie vom Gaszustand verknüpft sind und auf eine Struktur der Flüssigkeit hindeuten, die in unserem vereinfachten Modell nicht enthalten ist.

8. *Ausbreitung der Wärme in der Kernmaterie.* Wir haben gesehen, daß im Kern infolge der großen Zähigkeit im allgemeinen keine Impulsungleichmäßigkeit (Massenbewegung) auftritt. Ebenso läßt es sich zeigen, daß sich lokale Temperaturschwankungen unter gewöhnlichen Umständen sehr schnell ausgleichen werden. Man erkennt dies am einfachsten folgendermaßen.

Wir nehmen einfachheitshalber an, daß der Kern unendlich groß ist. In der Zeit Null sei die Verteilung der Temperatur T derart, daß im rechten Halbraum $T = 0$, und im linken Halbraum $T = T_0$ ist. Wir fragen nun, wie groß die Zeit sein wird, in der sich die Temperatur in der Entfernung r_0 von der Mitte um $\frac{1}{4} T_0$ ändert, wobei r_0 von der Größenordnung des Kernradius ist. Wir rechnen ferner so, als ob die Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärme von der Temperatur unabhängig wären, indem wir als ihre Werte die an der Temperatur $\frac{1}{2} T_0$ annehmen.

Diese Frage läßt sich mathematisch einfach behandeln. Die Temperaturverteilung in der Zeit t ist gegeben durch

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left\{ 1 - \psi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2C_v}{\kappa}} \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right\} \quad (8.1)$$

mit

$$\psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad (8.2)$$

¹⁾ N. Bohr, Nature **141**, 326, 1938.

wenn wir die x -Achse von links nach rechts gelegt haben¹⁾. Die „Halbwertszeit“ τ ist dann die Lösung der Gleichung

$$1 - \psi\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varrho C_v}{\kappa}} \frac{r_0}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{1}{2}. \quad (8.3)$$

Lösen wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\tau = \frac{1}{0,92} \frac{\varrho C_v r_0^2}{\kappa}. \quad (8.4)$$

Wir führen nun das Einheitensystem (7.8) ein. Die Wärmeleitfähigkeit läßt sich in den neuen Einheiten ausdrücken:

$$\kappa = 1,14 \frac{1}{T}, \quad (8.5)$$

und ferner können wir C_v aus der Formel (4.15) entnehmen:

$$C_v = 4,9 T. \quad (8.6)$$

Tragen wir nun (8.5), (8.6), $r_0 \approx 1$ und $\varrho \approx 50$ in (8.4) ein, so erhalten wir

$$\tau \approx 230 T^2. \quad (8.7)$$

Für die Temperatur $T_0 \approx 1/10$, wie es gewöhnlich der Fall ist, ist daher τ von der Größenordnung $1/2$. Daß die Wärmeausbreitung so schnell vor sich geht, d. h. mit einer Geschwindigkeit, die größer als die Molekülgeschwindigkeit selbst ist, hat offenbar keinen Sinn und besagt, daß die angenommene Temperaturverteilung gegen unsere Voraussetzung nicht als langsam veränderlich betrachtet werden darf. Allein man kann wohl behaupten, daß das Temperaturgleichgewicht unter gewöhnlichen Umständen sehr schnell, in einer Zeit von der Größenordnung 1, zustande kommt, und daher diese Zeit gänzlich vernachlässigt werden darf. Wenn aber die Temperatur sehr hoch steigt, wächst die „Halbwertszeit“ τ nach (8.7) schnell an. Die endliche Zeitdauer der Wärmeausbreitung wird sich daher bemerkbar machen, falls es sich um eine starke lokale Erhitzung des Kerns handelt, wie es wohl bei einem Zusammenstoß vom Atomkern mit einem sehr energiereichen Teilchen der Fall sein wird. Hier wird nämlich der Punkt, wo der Atomkern vom stoßenden Teilchen getroffen wurde, zuerst stark erhitzt, und die Verdampfung kann schon an dieser Stelle einsetzen, ehe die Wärme

¹⁾ Z. B. Frank-v. Mises, Differentialgl. d. Physik, Bd. II, 3. Abschnitt, S. 536.

über den ganzen Kern sich ausgebreitet hat¹⁾. Diese Erscheinung hat insofern eine gewisse Ähnlichkeit mit dem selektiven Kernphotoeffekt, wie er von Bohr diskutiert wurde, als hier auch ein „Übergangszustand“ auftritt, bei dem es sich um die Konkurrenz zwischen zwei Erscheinungen (bei dem Photoeffekt zwischen Ausstrahlung und Abklingung, hier aber zwischen Verdampfung und Wärmeausbreitung) in diesem Übergangszustand handelt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Heisenberg für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und manche wertvolle Diskussion meinen herzlichen Dank auszusprechen. Ebenso danke ich dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, der mir meinen Aufenthalt in Leipzig ermöglicht hat.

Leipzig, Institut für theoretische Physik, den 1. Juli 1938.

Anhang.

Wie in Abschnitt 1 besprochen wurde, besteht der Stoßquerschnitt $w(g, \vartheta)$, entsprechend verschiedenen Typen von Zusammenstößen, aus verschiedenen Summanden. Um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, betrachten wir den Zusammenstoß, bei dem ein Proton mit positivem Spin beteiligt ist. Dieses kann jeden von den folgenden vier Typen von Zusammenstößen erleiden:

1. Zusammenstoß mit einem Proton mit positivem Spin;
2. Zusammenstoß mit einem Proton mit negativem Spin;
3. Zusammenstoß mit einem Neutron mit positivem Spin;
4. Zusammenstoß mit einem Neutron mit negativem Spin.

Der Gesamtstoßquerschnitt besteht entsprechend aus vier Summanden. Für den Wirkungsquerschnitt sind bekannterweise die Phasenverschiebungen der radialen Wellenfunktionen maßgebend. Wir führen also die Phasen δ_l^{ij} , $l = 0, 1, 2, 3, \dots$; $i, j = 1$ oder 3 , ein, die folgendermaßen definiert werden: Die Lösung der radialen Wellengleichung mit der azimuthalen Quantenzahl l

$$\frac{\hbar}{m} \left\{ \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right\} + \{E - J^{ij}(r)\} u_l = 0, \quad (1)$$

die im Koordinatenursprung verschwindet, sei asymptotisch

$$u(r) \approx \sin(kr - \frac{1}{2}l + \delta_l^{ij}), \quad (2)$$

worin

$$k = \frac{mg}{2\hbar}, \quad E = \frac{1}{4} mg^2. \quad (3)$$

$J^{ij}(r)$ in (1) stellt dabei das Potential für die Wechselwirkung der Teilchen dar. Dabei bedeuten $J^{13}(r)$, $J^{31}(r)$, $J^{33}(r)$ und $J^{11}(r)$ der Reihe nach die Potentiale

¹⁾ Vgl. H. Bethe, Phys. Rev. **53**, 675, 1938.

für die 3S -, 1S -, 3P - und 1P -Kraft. Die Wirkungsquerschnitte für die vier verschiedenen Fälle werden folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned}
 1. \quad w_1(g, \vartheta) &= \frac{1}{2k^2} \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{33}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 2. \quad w_2(g, \vartheta) &= \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{33}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{31}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \text{Glieder, die in } \cos \vartheta \text{ ungerade sind.} \\
 3. \quad w_3(g, \vartheta) &= \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{33}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{13}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \text{Glieder, die in } \cos \vartheta \text{ ungerade sind.} \\
 4. \quad w_4(g, \vartheta) &= \frac{1}{8k^2} \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{33}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8k^2} \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{11}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8k^2} \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{31}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8k^2} \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{13}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + \text{Glieder, die in } \cos \vartheta \text{ ungerade sind.}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Der Gesamtstoßquerschnitt ist die Summe aller dieser vier w . Da wir aber dabei die Glieder, die in $\cos \vartheta$ ungerade sind, nach der Bemerkung in Abschnitt 2 weglassen können, erhalten wir einfach:

$$\begin{aligned}
 w(g, \vartheta) &= \frac{1}{8k^2} \left\{ 9 \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{33}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \right. \\
 &\quad + 3 \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{31}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad + 3 \left| \sum_{\text{gerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{13}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \\
 &\quad \left. + \left| \sum_{\text{ungerade}} (2l+1) (e^{2i\delta_l^{11}} - 1) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Wir entwickeln nun (5) in eine Reihe nach Kugelfunktionen. Wir brechen dabei die Summation über l in (5) für $l = 2$ ab, denn die höheren δ_l sind schon

verhältnismäßig klein. Durch Einsetzen dieser Entwicklungskoeffizienten in (3. 10) und (5. 8) erhalten wir

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{8k^2} [12 (\sin^2 \delta_0^{31} + \sin^2 \delta_0^{13}) + 18 (9 \sin^2 \delta_1^{33} + \sin^2 \delta_1^{11}) + 15 \{ \sin^2 \delta_0^{31} + \sin^2 \delta_2^{31} - \sin^2 (\delta_0^{31} - \delta_2^{31}) + \sin^2 \delta_0^{13} + \sin^2 \delta_2^{13} - \sin^2 (\delta_0^{13} - \delta_2^{13}) \} + \frac{5775}{56} (\sin^2 \delta_2^{31} + \sin^2 \delta_2^{13})], \quad (6)$$

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^{(2)} = \frac{1}{8k^2} [12 (\sin^2 \delta_0^{31} + \sin^2 \delta_0^{13}) + 9 (9 \sin^2 \delta_1^{33} + \sin^2 \delta_1^{11}) - \frac{15}{2} \{ \sin^2 \delta_0^{31} + \sin^2 \delta_2^{31} - \sin^2 (\delta_0^{31} - \delta_2^{31}) + \sin^2 \delta_0^{13} + \sin^2 \delta_2^{13} - \sin^2 (\delta_0^{13} - \delta_2^{13}) \} + \frac{2625}{56} (\sin^2 \delta_2^{31} + \sin^2 \delta_2^{13})]. \quad (7)$$

Um nun die Phase δ zu berechnen, legen wir das Kastenpotential zugrunde; wir setzen also an:

$$J^{ij}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \geq a \\ -A^{ij} & \text{für } r < a. \end{cases} \quad (8)$$

Dieses Potential gestattet nun die Phase analytisch auszudrücken:

$$\delta_l^{ij} = \arctg (-)^l \frac{k J_{l-1/2}(ka) J_{l+1/2}(k'a) - k' J_{l-1/2}(k'a) J_{l+1/2}(ka)}{k J_{-l+1/2}(ka) J_{l+1/2}(k'a) + k' J_{l-1/2}(k'a) J_{-l-1/2}(ka)}, \quad (9)$$

worin J die Besselsche Funktion und k' die Wellenzahl im Potentialtopf bedeutet:

$$k' = \sqrt{m(A^{ij} + E)/h}. \quad (10)$$

Wir bezeichnen nun

$$\left. \begin{aligned} g &= 2 g_0 x, \\ k &= k_0 x, \\ E &= 2 E_0 x, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wo g_0 bzw. E_0 bzw. k_0 die maximale Geschwindigkeit bzw. maximale Energie bzw. maximale Wellenzahl der Fermi-Verteilung bedeutet. Dann können wir δ als Funktion von x darstellen. Dabei werden folgende numerischen Werte zugrunde gelegt:

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= 23 \text{ TME.}, \\ g_0 &= 6,41 \cdot 10^9 \text{ cm/sec}, \\ k_0 &= 1,02 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}, \\ a &= 2,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \\ A &= 32,6 \text{ TME.}, A^{31} = \frac{2}{3} A^{13}, A^{11} = -3 A^{13}, A^{33} = -\frac{2}{9} A^{13}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

A^{13} und a sind so bestimmt, daß sie den richtigen Wert des Messendefektes für das Deuteron geben. A^{31} ist so bestimmt, daß das Singulett-niveau des Deuterons ungefähr an Null liegt. Ferner sind A^{11} und A^{33} so bestimmt, daß sie die Volzschen Bedingungen¹⁾

$$\left. \begin{aligned} A^{31} + 3 A^{33} &= 0 \\ 3 A^{13} + A^{31} + 3 A^{33} + A^{11} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

erfüllen.

¹⁾ H. Volz, ZS. f. Phys. **105**, 537, 1937.

Die Abhängigkeit der verschiedenen Phasen von x sind in Fig. 4 dargestellt. Dabei sind aber δ_1^{33} , δ_2^{13} und δ_2^{31} nicht durch die Formel (9), sondern durch die Näherungsformel, die für kleine Phasen gültig ist, ausgerechnet:

$$\delta_l^{ij} = \frac{A^{ij}}{2 E_0} \frac{1}{x^2} \int_0^{k_0 a x} \{J_{l+1/2}(x)\}^2 dx. \quad (14)$$

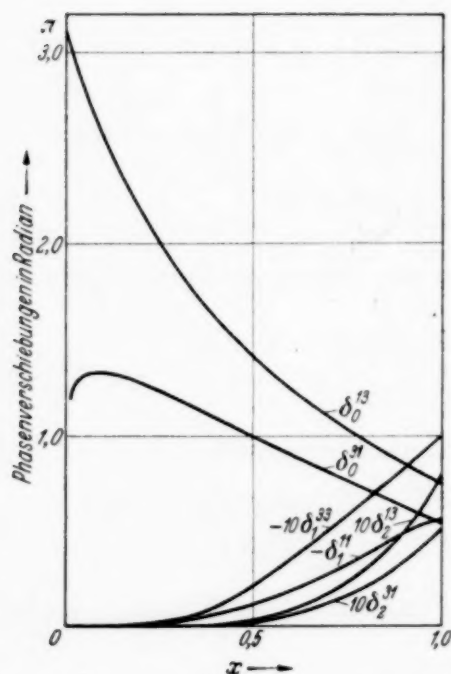


Fig. 4. Abhängigkeit der verschiedenen Phasen von x .

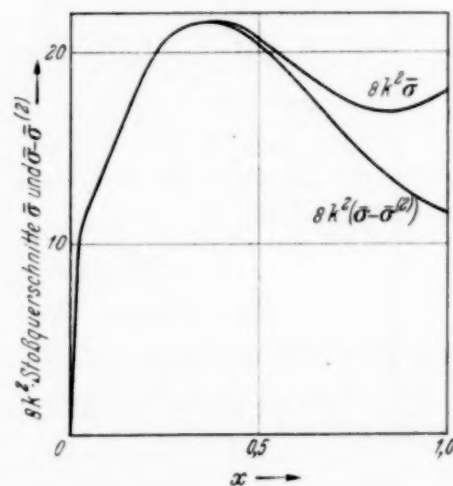


Fig. 5. Abhängigkeit der Stoßquerschnitte von x . In der Figur sind die dimensionslosen Größen $8k^2\bar{\sigma}$ und $8k^2(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^{(2)})$ bezeichnet.

Wenn wir also die δ kennen, können wir $\bar{\sigma}$ und $\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^{(2)}$ als Funktion von x darstellen. Sie sind in Fig. 5 gegeben. Die effektiven Stoßquerschnitte Q_1 und Q_2 sind nun graphisch ausgerechnet worden:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{(8k_0)^2} \cdot 18,1 = 2,17 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2, \\ Q_2 &= \frac{1}{(8k_0)^2} \cdot 8,8 = 1,06 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Resonanzen bei der (n, α) -Umwandlung von Neon.

Von K. Gailer in Heidelberg.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Juli 1938.)

Bei der Umwandlung von Neon durch schnelle Neutronen wurden für die austretenden α -Teilchen diskrete Energiegruppen gefunden. Diese werden als Resonanzaustritt der α -Teilchen gedeutet.

1. Problemstellung. Bei der Atomumwandlung mit Hilfe von geladenen Teilchen sind seit längerer Zeit bestimmte charakteristische Energien für diese Teilchen bekannt, für welche die Ausbeute ausgeprägte Maxima erreicht. Man spricht in solchen Fällen von „Resonanzeindringung“ der Teilchen in den Potentialberg des Kerns von außen her. Bei Umwandlungen durch schnelle Neutronen konnten solche Resonanzen bis vor kurzem nicht beobachtet werden, weil man nicht über homogene Neutronenstrahlen von abstufbarer Energie verfügt. Kürzlich hat jedoch Wilhelmy¹⁾ einen Weg gefunden, Resonanzen auch bei (n, α) - und (n, p) -Prozessen zu beobachten: Man bestrahlt mit Neutronen von kontinuierlicher Energieverteilung und mißt die Energieverteilung der *entstehenden* Teilchen. Auch hier findet man diskrete Energiegruppen. Jede solche „Austrittsresonanz“ ist identisch mit einer „Eindringungsresonanz“ des Neutrons; die Resonanzenergie des Neutrons läßt sich rückwärts aus der Energiebilanz berechnen. Mit jeder Resonanz tritt ein Anregungszustand des Zwischenkerns in Erscheinung, der auf diese Weise ausgemessen werden kann. In der vorliegenden Arbeit wurde die Methode von Wilhelmy auf die Umwandlung von Neon durch Neutronen angewandt.

Neon besitzt drei stabile Isotope $_{10}\text{Ne}^{20}$, $_{10}\text{Ne}^{21}$, $_{10}\text{Ne}^{22}$ mit den Häufigkeiten 90% bzw. 0,27% bzw. 9,73%. Infolge seiner geringen Häufigkeit scheidet $_{10}\text{Ne}^{21}$ für die Beobachtung praktisch aus. Wir haben daher nur noch die folgenden Reaktionen zu betrachten:

- 1 a) $_{10}\text{Ne}^{20} (n, \gamma) _{10}\text{Ne}^{21}$,
- 1 b) $_{10}\text{Ne}^{22} (n, \gamma) _{10}\text{Ne}^{23*}$,
- 2 a) $_{10}\text{Ne}^{20} (n, p) _9\text{F}^{20*}$,
- 2 b) $_{10}\text{Ne}^{22} (n, p) _9\text{F}^{22*}$,
- 3 a) $_{10}\text{Ne}^{20} (n, \alpha) _8\text{O}^{17}$,
- 3 b) $_{10}\text{Ne}^{22} (n, \alpha) _8\text{O}^{19*}$.

¹⁾ E. Wilhelmy, ZS. f. Phys. **107**, 769, 1937.

Die Anlagerungsprozesse 1a) und 1b) sind bei Verwendung schneller Neutronen sehr unwahrscheinlich und scheiden für die weitere Betrachtung aus. Der Prozeß 2b) ist sehr unwahrscheinlich, da er zu einem um drei Masseneinheiten schwereren Isotop führt als das schwerste natürlich vorkommende Isotop ${}^9\text{F}^{19}$. Der Prozeß 2a) wird wohl existieren, doch scheint er gegenüber Prozeß 3a) wesentlich schwächer zu sein. Hierfür spricht der Umstand, daß Jaeckel¹⁾ wie auch Harkins, Gans und Newson²⁾ in der Nebelkammer bei Neon keinen (n, p) -Prozeß feststellen konnten. Beobachtet sind bei der Umwandlung von Neon durch schnelle Neutronen bisher nur Prozesse, die unter Emission eines α -Teilchens verlaufen, also Prozesse von der Art 3a) und 3b). Dabei ist allerdings der Prozeß 3a) wahrscheinlicher als der Prozeß 3b). [Jaeckel gibt unter 34 Neoumwandlungen in der Wilson-Kammer nur eine als für den Prozeß 3b) wahrscheinlich an.]

2. *Versuchsanordnung.* Es wurde die folgende im wesentlichen bereits von Wilhelmy benutzte Versuchsanordnung verwendet: Die Innenelektrode einer mit Neon³⁾ von Atmosphärendruck gefüllten Ionisationskammer war mit dem Gitter der Eingangsrohre (Elektrometerröhre T 113) eines aus zwei Verstärkungsstufen und einer Endröhre bestehenden Proportionalverstärkers verbunden. Die Registrierung der Ionisationsstöße geschah mit einem Schleifenzillographen von Siemens, bei dem zwei Schleifen hintereinander geschaltet waren. Die Ausschläge der einen Schleife wurden mittels Zylinderlinse auf bewegte Bromsilberpapierstreifen abgebildet, während die zweite Schleife die Ausschläge zur visuellen Kontrolle auf eine Mattscheibe gab. Die Proportionalität des Verstärkers wurde eingehend geprüft.

Die Ionisationskammer ist in Fig. 1 wiedergegeben. Die Kammer mußte so groß und der Gasdruck so hoch gewählt werden, damit die zu erwartende Reichweite der Teilchen genügend weit unterhalb der Kammerabmessungen blieb. Bei den gewählten Bedingungen haben α -Teilchen von 6 e-MV (das entspricht der maximalen ausgemessenen Energie) eine Reichweite von höchstens 8 cm, während die Abmessungen der Kammer 12 bzw. 21 cm betragen. Eine Kammer-spannung von 2500 Volt erwies

¹⁾ R. Jaeckel, ZS. f. Phys. **96**, 151, 1935. — ²⁾ W. D. Harkins, D. M. Gans u. H. W. Newson, Phys. Rev. **44**, 529, 1933 und **47**, 52, 1935. — ³⁾ Der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen, Höllriegelskreuth b. München, sei auch an dieser Stelle für die Überlassung des für diese Untersuchung benötigten besonders reinen Neons bestens gedankt.

sich als ausreichend für eine genügend schnelle Abscheidung der Ionen. Die Innenfläche der Kammer war vollkommen mit einer 0,05 mm dicken Silberfolie ausgekleidet, da, wie sich bei Wilhelmy zeigte, schnelle Neutronen Teilchen aus dem Messing auslösen. In der Mitte des als Hochspannungselektrode ausgebildeten Kammergehäuses war hinter einem 0,5 mm weiten, 1 mm langen Kanal ein schwaches Po-Präparat angebracht, welches ein α -Strahlbündel in die Kammer senden konnte, wenn eine von außen mittels Schliff drehbare Blende aus Silberblech den Kanal freigab.

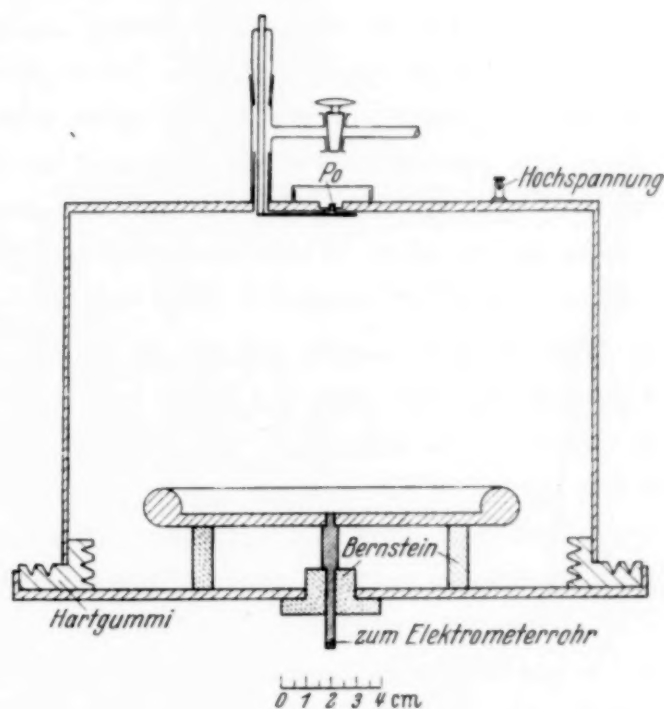


Fig. 1. Ionisationskammer.

Auf diese Weise wurde bei langen Registrierzeiten in Abständen von 20 Minuten eine Eichung der Anordnung sowie eine visuelle Kontrolle des Verstärkungsgrades vorgenommen. Kleine Änderungen des Verstärkungsgrades konnten durch einen variablen Nebenschluß zu den Oszillographenschleifen kompensiert werden. Der Nulleffekt der Kammer betrug etwa 6 Teilchen pro Minute gegenüber 30 Teilchen pro Minute für die Umwandlung von Neon durch schnelle Neutronen. Der Nulleffekt zeigte keine Andeutung von Maxima, insbesondere nicht an der Stelle der Po- α -Energie. Als Neutronenquelle diente ein ($\text{Rn} + \text{Be}$)-Präparat mit bis zu 90 mC. Zwischen Neutronenquelle und Ionisationskammer wurden 15 cm Blei eingeschaltet, damit die Nullage nicht durch die intensive γ -Strahlung der Quelle gestört wurde.

3. *Ergebnis.* Das experimentelle Ergebnis ist in Fig. 2 dargestellt. Hierbei ist die absolute Zahl der beobachteten Umwandlungen in Abhängigkeit von der bei dem Umwandlungsprozeß freiwerdenden Gesamtenergie

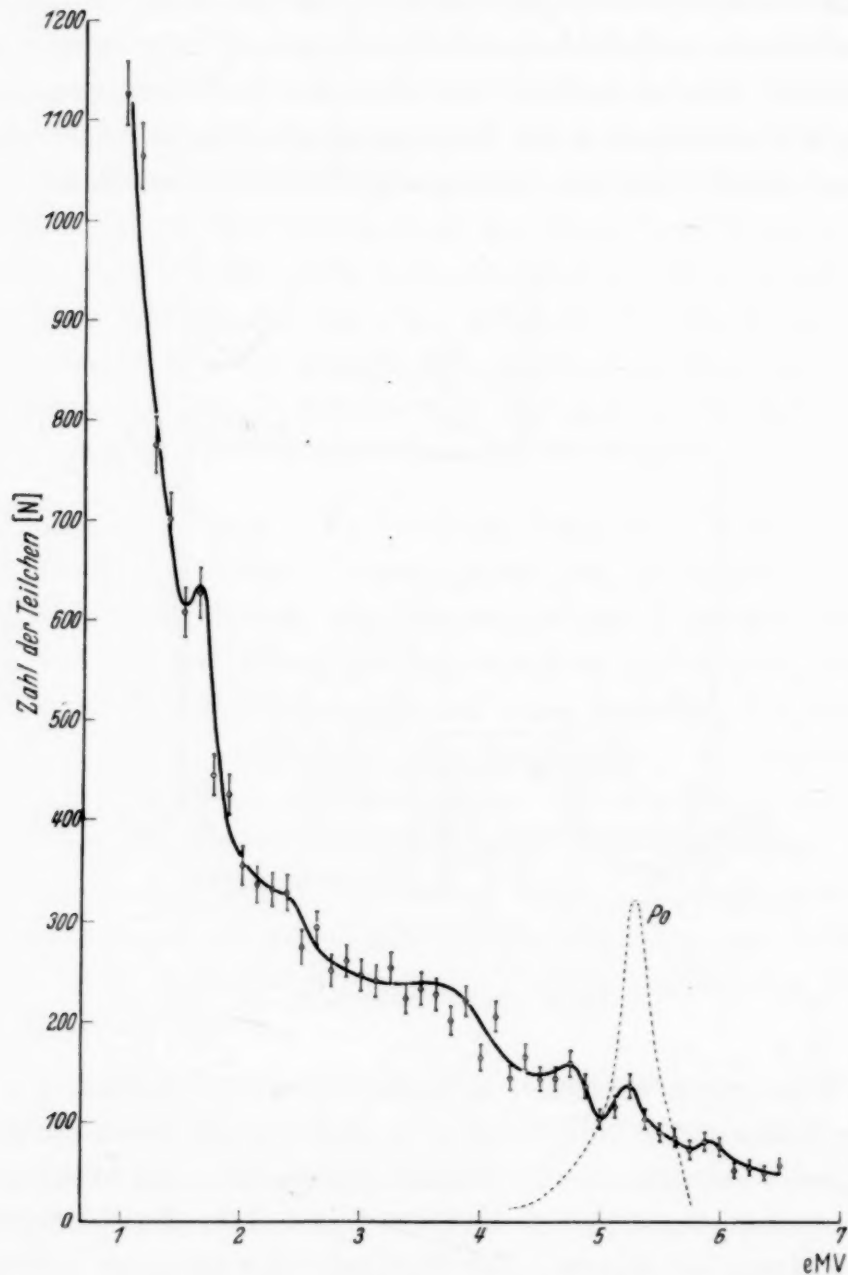


Fig. 2. Energieverteilung der Teilchen aus Neon mit (Rn + Be)-Neutronen.

(Energie des austretenden α -Teilchens + Rückstoßkern) aufgetragen. Man sieht ohne weiteres, daß die Kurve keinen glatten Verlauf nimmt; sie zeigt vielmehr Häufigkeitsmaxima bei Energien von rund 1,7; 2,4; 3,8; 4,8; 5,3 e-MV. Die gestrichelt eingezeichnete Verteilungskurve für die Po-Eichstrahlung gibt eine Vorstellung von der erreichbaren Auflösung.

4. *Diskussion.* Wie bereits Wilhelmy gezeigt hat, kann die Energieverteilung der benutzten Neutronen, die sehr verwaschen ist, nicht für die Entstehung der Maxima in Fig. 2 verantwortlich gemacht werden. Die Maxima müssen somit in der Umwandlung selbst ihren Ursprung nehmen. Man kommt dabei zu der Auffassung, daß unsere ausgezeichneten Energiewerte gewissen angeregten Zuständen des Zwischenkerns ($_{10}\text{Ne}^{21}$ bzw. $_{10}\text{Ne}^{23}$) entsprechen; d. h. der Anfangskern sucht sich aus dem kontinuierlichen Neutronenspektrum jene Neutronenenergien heraus, die zu einem möglichen Anregungszustand des Zwischenkerns und damit zu einer Resonanzumwandlung führen. Man kann als sicher annehmen, daß alle beobachteten Maxima durch α -Strahlen hervorgerufen werden. Protonen von etwa 2 e-MV oder mehr hätten schon zu große Reichweiten, um ihre Gesamtenergie in der Kammer abgeben zu können, und so ein scharfes Maximum zu erzeugen. Es käme also höchstens das erste Maximum als Protonenmaximum in Frage, aber auch dies ist recht unwahrscheinlich, weil bisher in der Wilson-Kammer keine Protonen beobachtet wurden.

Daß die Maxima in unserer Kurve (Fig. 2) nicht so deutlich ausgeprägt sind, wie dies etwa bei dem von Wilhelmy¹⁾ untersuchten Prozeß $_{7}\text{N}^{14}(n, \alpha)_{5}\text{B}^{11}$ der Fall ist, könnte seinen Grund darin haben, daß die Maxima zum Teil ziemlich eng beieinander liegen und sich daher überlagern. Eine verhältnismäßig große Zahl von Maxima könnte auf verschiedene Weise zustande kommen. Erstens ist es nicht ganz ausgeschlossen, daß außer dem Prozeß 3a) auch der Prozeß 3b) mit merklicher Häufigkeit auftritt; dieser würde natürlich andere Resonanzenergien besitzen. Zweitens ist nicht sicher, ob der aus dem Zwischenkern entstehende Endkern stets in demselben Anregungszustand (Grundzustand) zurückbleibt. Die Untersuchungen von Harkins und Mitarbeitern und von Jaeckel nach der Wilson-Methode haben zu dem Ergebnis geführt, daß die totale Energietönung der Umwandlung in recht weiten Grenzen schwankt. Das würde bedeuten, daß der Endkern O^{17} in mehreren verschiedenen Anregungszuständen auftritt²⁾. In diesem Falle gehören aber zu einem bestimmten Zustand des Zwischenkerns auch mehrere Energiegruppen der α -Teilchen, die sich um die Energiedifferenz der Endkerne unterscheiden. Nach Stetter soll z. B. O^{17} eine Anregungsstufe von 1,4 bis 1,6 e-MV haben. Energiedifferenzen von dieser Größe könnten in unserem Spektrum Fig. 2 wohl

1) E. Wilhelmy, ZS. f. Phys. **107**, 772, 1937. — 2) Vgl. hierzu auch G. Stetter, ebenda **100**, 652, 1936 und E. Fischer-Colbrie, Wien. Ber. **145**, 283, 1936.

vorkommen, doch soll dieser Punkt hier nicht weiter verfolgt werden. Ebenso scheint die Auswertung der Ergebnisse hinsichtlich der Resonanzenergien der Neutronen nach dem Schema von Wilhelmy nicht sinnvoll, solange die erwähnten Punkte nicht geklärt sind.

Zusammenfassung. Bei der Umwandlung von Neon durch schnelle Neutronen kontinuierlicher Energieverteilung wurden für die austretenden α -Teilchen bestimmte Energiegruppen gefunden. Die gemessenen Gesamtenergien (α -Teilchen + Rückstoßkern) liegen bei 1,7; 2,4; 3,8; 4,8; 5,3 e-MV. Diesen Gruppen können Anregungszustände des Zwischenkerns (Ne^{21} , eventuell auch Ne^{23}) zugeordnet werden, doch ist diese Zuordnung noch nicht eindeutig, solange nicht geklärt ist, welche Anregungszustände des Endkerns bei dem Prozeß auftreten können¹⁾.

Herrn Prof. Dr. W. Bothe danke ich herzlich für die Aufnahme in seinem Institut, für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für sein stets förderndes Interesse.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für med. Forschung, Juli 1938.

¹⁾ *Nachtrag bei der Korrektur:* Inzwischen hat W. E. Burcham die Anregungsstufen des Endkerns O^{17} aus der Reaktion $\text{F}^{19}(d, \alpha)\text{O}^{17}$ genauer bestimmen können (Vortrag, British Association, Cambridge, Aug. 1938), so daß jetzt eine Zuordnung unserer Resonanzgruppen versucht werden kann. Die beiden tiefsten Anregungszustände des O^{17} liegen nach Burcham bei 0,78 und 2,93 e-MV. Es genügen nun schon zwei Niveaus des Zwischenkerns Ne^{21} , um die hier beobachteten Resonanzgruppen zu deuten. Nimmt man nämlich zwei Gruppen von 4,7 bzw. 5,3 e-MV als zum Grundzustand des Endkerns gehörig an, so sollten zu den beiden erwähnten Anregungsstufen des Endkerns vier weitere Gruppen von 3,9 und 1,8 bzw. 4,5 und 2,4 e-MV gehören. Nur eine von diesen sechs Gruppen (4,5 e-MV) ist nicht beobachtet, die übrigen stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit mit den fünf beobachteten überein. Nimmt man nun die Energietönung des Prozesses zu — 0,5 e-MV an, so ergeben sich für das eindringende Neutron die beiden Resonanzenergien 5,2 und 5,8 e-MV. Natürlich sind weitere Resonanzen nicht ausgeschlossen.

Über eine gasionisierende Strahlung einer Funkenentladung¹⁾.

Von H. Raether, Jena.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 4. August 1938.)

Es wird der Nachweis erbracht, daß ein Funke (in H_2 , Luft oder O_2) eine Strahlung aussendet, die das Gas (H_2 , Luft oder O_2) zu ionisieren vermag. Die Beobachtung erfolgt in der Nebelkammer, in der die Photoelektronen, die durch die kurzwellige Strahlung (800 bis 1000 Å) des Funkens im Gas ausgelöst werden, durch Stoßionisation zu einer Elektronenlawine verstärkt werden. Die Abnahme der Dichte der Nebelspuren mit wachsendem Abstand von der Funkenstrecke erlaubt die Messung der Absorptionskoeffizienten dieser Strahlung. Sie ergeben sich für Luft zu $\mu_{760} \simeq 2 \text{ cm}^{-1}$, für H_2 zu $\mu_{760} \simeq 0,8 \text{ cm}^{-1}$ und für O_2 zu $\mu_{760} \simeq 5 \text{ cm}^{-1}$. — Eine solche gasionisierende Strahlung wird ebenfalls von Gleitentladungen sowie im Vorstadium des Funkens von den sogenannten „Vorentladungskanälen“ erzeugt. Es wird auf die Bedeutung der gasionisierenden Strahlung für den Übergang der Elektronenlawine in den Funkenkanal hingewiesen. Die hier beobachtete Strahlung scheint, wie ein Vergleich der Absorptionskoeffizienten zeigt, mit der in einer Zählrohrentladung entstehenden kurzwelligen Strahlung identisch zu sein. — Eine so kurzwellige Sonnenstrahlung würde bis in die Ionosphäre eindringen können, um deren Leitfähigkeit zu erzeugen.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Versuche ist die Feststellung, ob aus einer Funkenentladung eine Strahlung emittiert wird, die hinreichend kurzwellig ist, um das Gas zu ionisieren und welche mittlere Reichweite diese Strahlung hat.

Für die Frage der Entwicklung von Entladungen (Funke, ebene und räumliche „Lichtenbergsche Figuren“, Blitz) ist es von Interesse, ob während der Entwicklung der Elektronenlawine eine Strahlung entsteht, die im umgebenden Gas Photoelektronen auslöst und somit die für den Übergang der Lawine in eine selbständige Entladung notwendigen Nachlieferungselektronen in kürzester Zeit erzeugt²⁾. Zur Beantwortung dieser Frage wurde vorerst in der folgenden Mitteilung untersucht, ob eine Funkenentladung überhaupt eine solche Strahlung aussendet. (Es soll also hier noch nicht die Frage beantwortet werden, in welchem Stadium

¹⁾ Teilweise berichtet auf der Gautagung in Breslau (Juni 1938). —

²⁾ E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. techn. Phys. **16**, 438, 1935; ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936; H. Raether, Phys. ZS. **15**, 560, 1936.

der Entwicklung diese Strahlung ausgesandt wird.) Da die Versuche ein positives Ergebnis hatten, sollen einige Eigenschaften dieser Strahlung mitgeteilt werden.

Anordnung zum Nachweis der Strahlung.

Zum Nachweis dieser kurzwelligen Strahlung wurde die Nebelkammer als empfindlichste und einwandfreieste Methode benutzt. Das Prinzip war folgendes: Die nachzuweisende Strahlung einer Funkenstrecke wurde von der Seite her in die Nebelkammer geschickt (vgl. die schematische Fig. 1a). In dem Gas der Kammer findet der lichtelektrische Effekt statt.

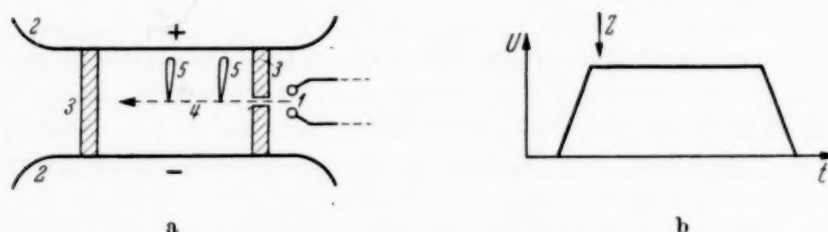


Fig. 1a. Schema der Versuchsanordnung zum Nachweis der gasionisierenden Strahlung eines Funkens. 1 Funkenstrecke. 2 Elektroden der Nebelkammer. 3 Glaswand der Nebelkammer. 4 Lichtstrahl. 5 Elektronenlawinen.

Fig. 1b. Verlauf der Spannung an den Elektroden der Nebelkammer, die zur Verstärkung der lichtelektrisch ausgelösten Primärelektronen durch Stoßionisation dient. Z Emissionsbeginn der kurzwelligen Funkenstrahlung.

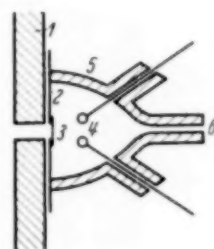
Es würde nun nicht genügen, kurz nach der Expansion die Einstrahlung vorzunehmen, da die sicher nur geringe Intensität der Strahlung wenige Kondensationskerne erzeugt, die von den stets vorhandenen Kondensationskernen nicht zu unterscheiden wären. Deshalb wurden diese lichtelektrischen Elektronen durch Stoßionisation verstärkt, d. h. sie wurden zum Zünden einer Lawine benutzt, die bequem in der Nebelkammer beobachtbar ist¹⁾. Es wurde also gleichzeitig mit dem Spannungsstoß, der die Funkenstrecke zum Ansprechen bringt, an die Elektroden der Nebelkammer eine annähernd rechteckige Stoßwelle von etwa 10^{-7} sec Dauer gelegt, die ausreichte, um eine gut beobachtbare Elektronenlawine von etwa 1 cm Länge zu erzeugen (vgl. Fig. 1b). Die Zahl der Elektronenlawinen ist dann ein Maß für die Zahl der lichtelektrischen Prozesse.

Die Nebelkammer und Stoßspannungsanlage sind die gleichen, wie sie der Verfasser zur Untersuchung der Elektronenlawinen benutzte, deren Primärelektronen durch Quarz UV von der Kathode abgelöst wurden (vgl. I, S. 93 u. f.).

¹⁾ H. Raether, ZS. f. Phys. **107**, 91, 1937 (im folgenden als I zitiert).

Fig. 2 zeigt den Anbau der Funkenstrecke an die Glaswand der Nebelkammer. Da bei der Expansion das mit Ionen verseuchte Gas aus dem Funkenraum in die Kammer gesaugt wurde, mußte dieser von der Kammer durch ein Zelluloidfenster getrennt werden. Es wurde daher auf die etwa 2 mm große Bohrung in der Glaswand eine Zelluloidfolie (2) mit Apiezonwachs aufgeklebt. Diese Folie hatte eine Bohrung von etwa 0,15 mm Durchmesser, welche mit einem dünnen Zelluloidhäutchen (3) verschlossen wurde. Da das Häutchen infolge der starken Absorption der Strahlung im Zelluloid sehr dünn sein mußte, wurde der Funkenraum auf den Druck

Fig. 2. Der Anbau der Funkenstrecke an die Kammer.
1 Glaswand der Kammer. 2 Zelluloidplatte zur Halterung
eines dünnen Zelluloidhäutchens (3). 4 Funkenstrecke.
5 Glaskolben. 6 Pumpstutzen.



des Kammerraumes vor der Expansion ausgepumpt und von ihm abgeschlossen. Um noch eine hinreichende Intensität durch das Häutchen hindurch zu bekommen, durfte es möglichst keine Interferenzfarben mehr zeigen. Häutchen von etwa $7,5 \cdot 10^{-6}$ cm Dicke auf eine Öffnung von 0,15 mm Durchmesser aufgebracht, hatten genügende Festigkeit, um die bei der Expansion auftretende plötzliche Druckdifferenz auszuhalten und ließen bei Luftfüllung noch eine nachweisbare Strahlung hindurch. Die Wasserstoffstrahlung hingegen (Kammer und Funkenraum mit H_2 gefüllt) ging noch durch strohgelbe Häutchen ($1,5 \cdot 10^{-5}$ cm Dicke) in hinreichender Intensität.

Die Funkenstrecke bestand aus Messing bzw. Aluminiumkugeln von 3 mm Durchmesser in einem Abstand von $\frac{1}{2}$ bis 1 mm. Die Entfernung Funkenstrecke—Häutchen betrug etwa 6 mm, so daß ein feiner Lichtstrahl ausgeblendet wurde und nicht die Kathode treffen konnte. An die Funkenstrecke wurde eine Stoßspannung gelegt, die ein Mehrfaches der statischen Spannung betrug, so daß der Funke mit unmerkbarer Streuung zündete.

Ergebnisse.

I. Luft. Fig. 3a, b, c zeigen typische Photographien von Elektronenlawinen, deren Primärelektronen durch kurzwelliges Licht in Luft ausgelöst wurden. Auf Fig. 3a sind noch die Glaswände des zwischen den Elektroden befindlichen Gassechsecks zu sehen, rechts ist die Funken-

strecke sichtbar. In Fig. 3c gelang es für wenige Aufnahmen ein dünneres Häutchen als sonst zu verwenden, während Fig. 3a und b mit Häutchen der oben angegebenen Dicke das häufigere Bild sind. Werden Häutchen von strohgelber Farbe verwendet, so treten selten Lawinen in der Kammer auf. Desgleichen geht durch eine Flußspatplatte von 0,4 mm Dicke keine gasionisierende Strahlung mehr hindurch. Daß diese Elektronenerzeugung im Gas stattfindet, läßt sich dadurch bekräftigen, daß, wenn die Spannung an den Elektroden der Nebelkammer umgepolt wird,

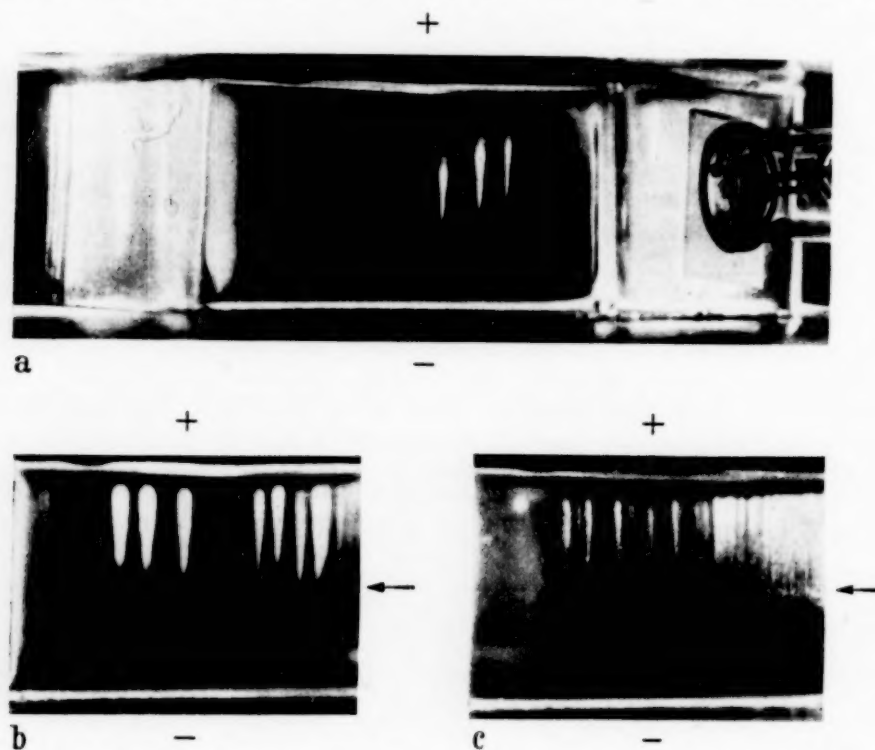


Fig. 3. Elektronenlawinen, deren Primärelektronen durch kurzwelliges Licht einer Funkenstrecke (in a rechts sichtbar, in b und c als Pfeil gekennzeichnet) im Gas ausgelöst wurden. Luft, 273 Torr. Die Verstärkung e^{ax} beträgt einige 10^3 . Die Reflexe in a stammen von den Glaswänden der Kammer. In b und c ist nur der mittlere Ausschnitt wiedergegeben. In c, wo ein besonders dünnes Zelluloidfenster verwendet wurde, ist die starke Absorption der Strahlung im Gas an der Abnahme der Spurendichte gut erkennbar.

die Lawinen nach der entgegengesetzten Richtung vorwachsen (vgl. Fig. 5). In weiterer Übereinstimmung hiermit ist auch die Beobachtung, daß die Länge der Lawinenspur mit der aus der Stoßspannungsdauer berechneten in Einklang ist (vgl. S. 619).

Wir können also zweierlei feststellen:

1. Es wird aus der Funkenentladung eine Strahlung emittiert, die das Gas zu ionisieren vermag;
2. die Absorption der Strahlung bei den verwendeten Drucken ist innerhalb der Kammer merklich (vgl. Fig. 3c).

Zu 1. Welches Gas wird ionisiert?

In der Kammer befindet sich außer Luft die Kondensationssubstanz. Diese war in einer Versuchsreihe ein Alkohol-Wasser-Gemisch¹⁾, in einer anderen reines Wasser. Sowohl in der Intensität als auch in der mittleren Reichweite der Strahlung (vgl. unten) war kein merkbarer Unterschied vorhanden. Vergleichen wir die Ionisierungsspannungen V_j , so haben wir

$$V_{j(O_2)} = 12,5 \text{ Volt},$$

$$V_{j(H_2O)} = 13,0 \text{ Volt},$$

$$V_{j(N_2)} = 15,8 \text{ Volt}^2).$$

Hieraus können wir schließen, daß die Wellenlänge der Strahlung höchstens 1000 Å beträgt. Sie entsteht vermutlich bei der Anregung der extrem ultravioletten Banden des O_2 und N_2 -Moleküls bzw. der ionisierten Moleküle, die zwischen 600 und 1000 Å liegen³⁾.

Diese Wellenlängenbestimmung macht das oben mitgeteilte Resultat verständlich, daß die Häutchendicke einen wesentlichen Einfluß auf die Spurenzahl hat: Der Absorptionskoeffizient von Zelluloid beträgt in einem Wellenlängenbereich von 300 bis 1000 Å: $\mu/\rho_0 = 7 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{gr}^4)$, also $\mu \simeq 10^6 \text{ cm}^{-1}$. Eine Änderung der Häutchendicke von $7,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ auf $5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ erhöht die durchgelassene Intensität auf das 12fache. Diese Änderung der Spurenzahl entspricht ungefähr der Beobachtung.

Zu 2. Absorption der Strahlung.

Fig. 3b und c zeigen eine merkliche Abnahme der Lawinendichte innerhalb der Kammer, d. h. der reziproke Absorptionskoeffizient $\mu^{-1} (\text{cm})$ ist von der Größenordnung cm. Um diesen genauer festzulegen, wurde der Abstand der Lawinenanfangspunkte von der Funkenstrecke ausgemessen und jeweils die Zahl der Lawinen innerhalb $1/2 \text{ cm}$ (Δn) als Funktion der Entfernung aufgetragen. In Fig. 4a ist die Verteilung von 50 Spuren wiedergegeben. Der Nullpunkt ist 4 cm von der Funkenstrecke entfernt⁵⁾. Um hieraus den Absorptionskoeffizienten zu bestimmen, wurde folgendermaßen vorgegangen: Nimmt die Zahl der Lichtquanten n nach dem Gesetz

¹⁾ Siehe I, S. 95. — ²⁾ Die Ionisierungsspannung von C_2H_5OH ist unbekannt (vermutlich liegt sie bei 10 Volt). — ³⁾ J. J. Hopfield, Phys. Rev. **35**, 1133, 1930; **36**, 789, 1930. — ⁴⁾ H. M. O'Bryan, Phys. Rev. **40**, 123, 1932. $\mu/\rho_0 = 7 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{gr}$ ist der bei 800 Å gemessene Maximalwert. Die Abweichungen von diesem Wert in dem oben angegebenen Wellenlängenbereich sind jedoch gering. — ⁵⁾ Spuren, die kleinere Entfernungen von der Funkenstrecke hatten, konnten in dieser Apparatur nicht photographiert werden. Es ist eine Kammer im Bau, die diesen Nachteil vermeidet.

$n = n_0 e^{-\mu x}$ ab, so ist die Zahl der auf der Strecke dx absorbierten Quanten $dn = \mu n dx$. Betrachten wir, wie soeben, die Zahl der auf $1/2$ cm stattfindenden Absorptionsprozesse d. h. $\Delta n = n_0 e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu/2})$, so ergibt die Auftragung $\ln \Delta n_0 / \Delta n = \mu x$ den Wert des Absorptionskoeffizienten. In Fig. 4b ist dies auf Grund der Fig. 4a geschehen und ergibt einen mittleren Absorptionskoeffizienten

$$\mu \simeq 0,65 \text{ cm}^{-1} \text{ bei } 273 \text{ Torr}$$

bzw. umgerechnet

$$\mu \simeq 1,8 \text{ cm}^{-1} \text{ bei } 760 \text{ Torr.}$$

Zur Kontrolle wurde der Enddruck in der Kammer auf die Hälfte herabgesetzt und die Verteilung von 124 Spuren ausgemessen, die auch in Fig. 4b

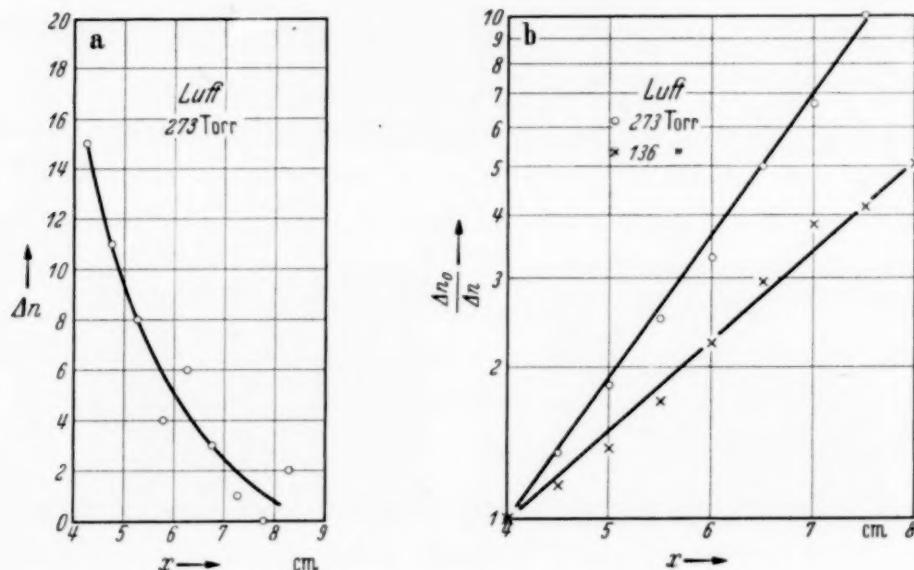


Fig. 4a. Zahl der Nebelspuren auf $1/2$ cm (Δn) als Funktion der Entfernung (x) von der Funkenstrecke.

Fig. 4b. Verteilung $\frac{\Delta n_0}{\Delta n}$ in logarithmischem Maßstab (Kurve von a) bei 273 Torr sowie 136 Torr. Δn_0 Zahl der Spuren zwischen 4 und 4,5 cm.

wiedergegeben ist. Es ergibt sich $\mu \simeq 0,4 \text{ cm}^{-1}$ bei 136 Torr bzw. $2,2 \text{ cm}^{-1}$ bei 760 Torr, also innerhalb der Genauigkeit in Übereinstimmung mit dem Wert bei höherem Druck. Hieraus folgt, daß die Dämpfe der Kondensationssubstanz keine sehr wesentliche Rolle spielen.

II. Wasserstoff. Die gleichen Versuche wurden wiederholt, nachdem Kammer und Funkenraum mit Wasserstoff gefüllt worden waren. In Fig. 5 sind drei Aufnahmen von Lawinen in H_2 wiedergegeben. In a und c wurde die Kammer Spannung gegenüber b umgepolt, so daß die Lawinen von der Mitte, wo die Elektronen ausgelöst wurden, nach unten liefen.

Bei H_2 besteht insofern eine Schwierigkeit in der Deutung, als die Ionisierungsspannung des H_2 -Moleküls 16,5 Volt beträgt, also um 3,5 Volt höher liegt als für das H_2O -Molekül. Die einzige Möglichkeit zu entscheiden,

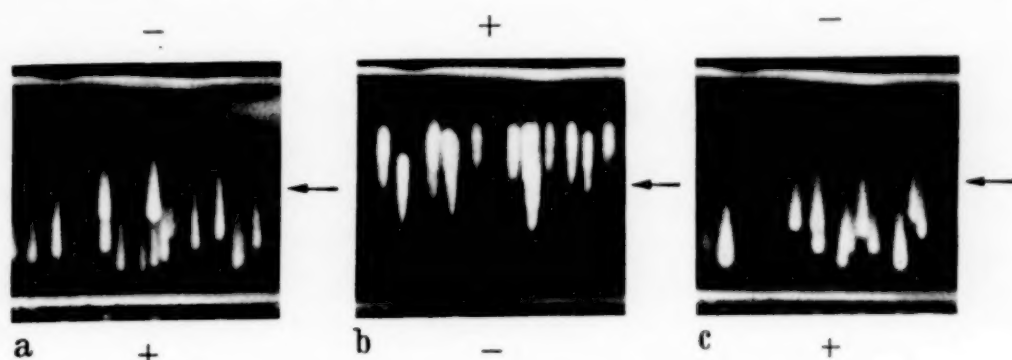


Fig. 5. Elektronenlawinen in H_2 (235 Torr), die durch lichtelektrischen Effekt im Gas gezündet wurden. In a und c ist die Spannung an den Elektroden der Kammer gegenüber b umgepolt, so daß die Lawinen nach unten laufen. Der Pfeil stellt die Funkenstrecke dar.

ob auch das H_2 -Molekül ionisiert wird, bot die Änderung des Druckes. In Tabelle 1 ist die Zahl der pro $1/2$ cm gemessenen Spuren als Funktion der Entfernung wiedergegeben.

Tabelle 1. Zahl der Spuren pro $1/2$ cm (Δn) als Funktion der Entfernung von der Funkenstrecke (x) in H_2 bei 455 Torr.

x . . .	5–5,5	5,5–6	6–6,5	6,5–7	7–7,5	7,5–8	8–8,5
Δn . . .	37	25	22	24	15	11	8

In Fig. 6 ist das Verhältnis $\Delta n_0/\Delta n$ als Funktion der Entfernung für 455 Torr (aus 142 Spuren) und 235 Torr (aus 149 Spuren) aufgetragen. Aus den Messungen bei 455 Torr ergibt sich

$$\mu \simeq 0,5 \text{ cm}^{-1} \quad \text{bei 455 Torr}$$

bzw.

$$\mu \simeq 0,8 \text{ cm}^{-1} \quad \text{bei 760 Torr.}$$

Auch hier, wie in Luft, ändert sich die Verteilung der Absorptionsprozesse wesentlich, wenn der Druck des Wasserstoffes halbiert wird. Aus Fig. 6 ergibt sich

$$\mu \simeq 0,3 \text{ cm}^{-1} \quad \text{bei 235 Torr}$$

bzw.

$$\mu \simeq 0,9 \text{ cm}^{-1} \quad \text{bei 760 Torr.}$$

Mithin wird das Wasserstoffmolekül ebenfalls ionisiert, d. h. die Strahlung enthält Wellenlängen von $\sim 800 \text{ \AA}$. Da die Lyman-Serie (Grenze: 13,5 Volt)

zur Ionisation des H_2 -Moleküls (15,3 Volt) nicht ausreicht, so hat man auch hier, wie bei O_2 und N_2 , die ultravioletten Banden des H_2 -Moleküls verantwortlich zu machen, die bis zu 810 \AA hinunter verfolgt sind¹⁾.

Beobachtet man die Ionisationsspuren einmal in Luft bei 273 Torr, ein anderes Mal mit H_2 -Füllung von 455 Torr durch dasselbe Zelluloid-

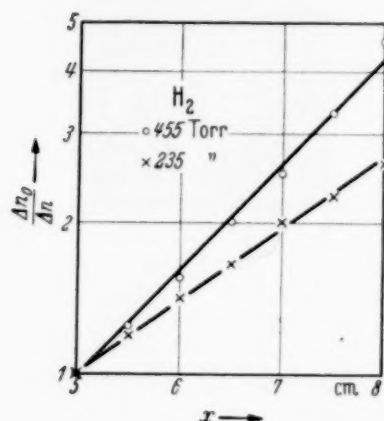


Fig. 6. Verteilungskurve der Spuren in H_2 bei 455 Torr (nach Tabelle 1) sowie bei 235 Torr.

fenster, so sind in H_2 größenordnungsmäßig mehr Spuren zu sehen. Da der Absorptionskoeffizient beider Gase bei diesen beiden Drucken ungefähr gleich ist, muß man auf eine in H_2 erheblich größere kurzwellige Intensität des Funkenlichtes als in Luft schließen. Damit steht die Beobachtung in Einklang, daß man in H_2 auch noch bei einem strohgelben Zelluloidfenster mehrere Lawinen pro Expansion erhält, hingegen in Luft nicht mehr (vgl. unten).

III. Sauerstoff. Zum Schluß seien

einige Beobachtungen in O_2 mitgeteilt.

In O_2 haben wir die saubersten Verhältnisse, hier wird hauptsächlich das O_2 -Molekül ionisiert, da die Kondensationssubstanz (H_2O) eine höhere Ionisierungsspannung (13 gegen 12,5 Volt) hat.

Wurden in H_2 (235 Torr) bei jeder Expansion 5 bis 10 Spuren gesehen, so traten bei demselben Zelluloidfenster und Druck in O_2 nur eine verschwindende Zahl von Spuren auf. Um daher eine Verteilung der O_2 -Spuren aufzunehmen, mußte bei einem Druck von 120 Torr gearbeitet werden, bei dem etwa 3 Spuren pro Expansion auftraten. In Tabelle 2 sind 73 Spuren eingetragen und ergeben ein

$$\mu \cong 0,8 \text{ cm}^{-1} \text{ bei 120 Torr,}$$

also

$$\mu \cong 5 \text{ cm}^{-1} \text{ bei 760 Torr.}$$

Tabelle 2. Verteilung der Spuren in O_2 bei 120 Torr.

x . . .	4,5–5	5–5,5	5,5–6	6–6,5	6,5–7	7–7,5	7,5–8	8–8,5
Δn . . .	22	15	7	13	8	5	3	0

Ein Vergleich von μ_{Luft} mit μ_{O_2} zeigt uns, daß in Luft auch der Stickstoff ionisiert wird, da entsprechend der Zusammensetzung der Luft aus O_2 und N_2 der Anteil des O_2 an μ_{Luft} etwa 1 cm^{-1} ist, also kleiner als μ_{Luft} .

¹⁾ C. R. Jeppesen, Phys. Rev. **44**, 165, 1933.

Abschätzung der Intensität der Strahlung.

Die Intensität der durch die Blenden in die Kammer gelangenden Strahlung ist, wie die Aufnahmen zeigen, im Mittel gerade ausreichend, um eine gut auszählbare Anzahl von Spuren auszulösen. Um nun auf die in der Nähe des Funkenkanals vorhandene Intensität zu schließen, ist zu berücksichtigen, daß sowohl das Zelluloidfenster als auch eine Gasstrecke von etwa 4 cm zwischen Funkenbahn und Anfang unserer Verteilungskurve liegen. Berücksichtigt man diese beiden Umstände, so erhält man in unmittelbarer Funkennähe in dem gleichen Raumwinkel 10^4 bis 10^5 kurzwellige Quanten, in H_2 100 bis 1000mal mehr, und in dem Raumwinkel 4π etwa 10^7 bis 10^8 Quanten in Luft, also eine sehr erhebliche Anzahl.

Dieses Ergebnis ist wegen folgender Fragestellung wichtig: Sollte diese Strahlung bereits während der Entwicklung der Elektronenlawine in den Funkenkanal ausgesandt werden, so würde sie die Entladung in ganz entscheidender Weise beeinflussen, da infolge der Tatsache, daß die Ausbeute der gasionisierenden Strahlung im Gas gleich Eins ist, eine erhebliche Zahl von Nachlieferungselektronen für die Aufrechterhaltung und Stromsteigerung der Entladung zur Verfügung stünde. Die Beantwortung dieser Frage geht jedoch über das Ziel der vorliegenden Arbeit hinaus und soll später erfolgen.

Immerhin läßt sich aus der Länge der Lawinenspür zusammen mit der Kenntnis ihrer Entwicklungsgeschwindigkeit der Zeitpunkt der Emission der kurzwelligen Intensität ungefähr angeben: Der Funke zündet erst, wenn die Spannung an der Kammer bereits ihren vollen Wert erreicht hat, da die Spannungswelle für den Funken $4 \cdot 10^{-8}$ sec später ankommt als die Stoßwelle für die Nebelkammer. Die noch übrigbleibende Stoßdauer dieser Kammer-spannung reicht nun gerade für die Entwicklung der beobachteten Lawinenlänge aus, in Luft sowohl als in H_2 . Da die beobachteten Spuren-längen eine auffallend gleiche Länge haben, heißt dies, die gasionisierende Strahlung wird hauptsächlich dann emittiert, wenn die Spannung an der Funkenstrecke zusammenbricht und nur wenig während der nachfolgenden länger anhaltenden Bogenentladung. Da der Spannungszusammenbruch in einer Zeit von 10^{-8} bis 10^{-9} sec erfolgt, ist natürlich mit Hilfe der vorliegenden Beobachtungen eine genauere Festlegung des Emissionszeitpunktes nicht möglich.

Auftreten der gasionisierenden Strahlung bei Gleitentladungen und „Vor-entladungskanälen“.

Die große Zahl von Lichtquanten aus der Funkenentladung wird noch durch folgende zwei Beobachtungen bestätigt:

Oftmals tritt längs der Glaswand der Nebelkammer eine Gleitentladung auf. Diese strahlt ebenfalls eine intensive kurzwellige Strahlung

aus, die das Gas ionisiert. Liegt nach der Zündung einer solchen Gleit-entladung die Stoßspannung noch hinreichende Zeit an den Elektroden der Kammer, so können sich noch gut beobachtbare Lawinen aus den im Gas erzeugten Photoelektronen entwickeln, wie Fig. 7 zeigt. In Wasserstoff wie in Luft ist der ganze Kammerraum dicht mit kleinen Spuren gefüllt. Hierbei ist die Gleitentladung nicht besonders stark, gemessen an ihrem Leuchten, trotzdem wird eine derartig große Anzahl von Spuren beobachtet.

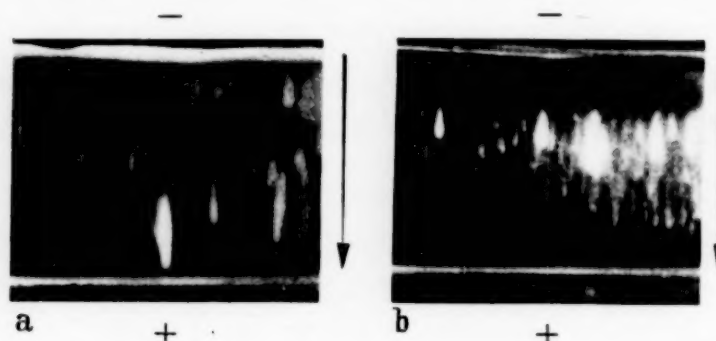


Fig. 7. Photoionisation im Gas durch eine Strahlung, die aus einer Gleit-entladung längs der inneren Glaswand der Kammer (durch einen Pfeil angedeutet) emittiert wird. a) Luft 273 Torr, b) H_2 235 Torr [an den Elektroden ist infolge der durch sie gestörten Unterkühlung (H_2 ist gut wärmeleitend) die Tropfenbildung unterbunden ¹⁾].

Es zeigt sich, daß das Elektrodenmetall der Funkenstrecke keine auffälligen Unterschiede in der Strahlung erzeugt. Daß es nicht an der Entladung beteiligt ist, beweist die Tatsache, daß an den Elektroden nach mehreren hundert Spannungsstößen keine Spuren von Abbrand zu erkennen waren. Es wird also diese Strahlung, wie auch oben angenommen, in dem Füllgas angeregt. Eine weitere Stütze hierfür gibt die Beobachtung, daß um einen langen (3,6 cm) „Vorentladungskanal“, d. i. ein stromschwaches Vorstadium des Funkenkanals²⁾, eine große Zahl von kurzen Lawinenspuren beobachtet wird, die durch Photoelektronen des Gases eingeleitet wurden. Es wird also diese Strahlung, die sehr wahrscheinlich die gleiche ist wie die oben mitgeteilte, bereits in einer sehr frühen Stufe der Funkenentwicklung ausgestrahlt und spielt eine bedeutsame Rolle für die Entwicklung der Funkenentladung.

¹⁾ Vgl. auch die Fig. 6 in I, S. 100. Mit Wasserstoff arbeitet es sich auch aus dem Grunde etwas schwieriger, weil die Tropfen erheblich schneller als in anderen Gasen fallen (größere Tropfen) und somit die Aufeinanderfolge von Expansion, Hochspannungsschaltung und Photographie an einen engen Spielraum gebunden ist. — ²⁾ Vgl. hierzu E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936 und **103**, 315, 1936.

Vergleich mit anderen Beobachtungen.

A. Über das Auftreten einer ähnlich kurzwelligen Strahlung in einer anderen Entladungsform, nämlich in einer Zählrohrentladung, berichtet Greiner¹⁾. Er beobachtet das Übergreifen der Entladung eines Zählrohrs in ein zweites danebenliegendes durch dünne Zelluloidfolien hindurch und führt dies auf die Wirkung einer kurzwelligen Strahlung zurück. Diese Strahlung ist sowohl in dünnen Zelluloidhäutchen stark absorbierbar als auch in den verwendeten Gasen (H_2 , Luft, O_2). Daß diese Strahlung mit der eines Funken verwandt ist, zeigt ein Vergleich der Absorbierbarkeit in den verschiedenen Gasen. Für die Absorption der Wasserstoffstrahlung in H_2 wird von Greiner aus einer Messung bei 70 Torr der Wert $\mu/\rho_0 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{gr}$ angegeben, d. h. $\mu_{760} = 1,4 \text{ cm}^{-1}$ (0,8 bis $0,9 \text{ cm}^{-1}$ aus Nebelkammermessungen vgl. S. 617). Berechnet man weiterhin aus seinen Meßreihen in Luft bei 60 und 160 Torr den Absorptionskoeffizienten, so erhält man Werte, die gut mit den Nebelkammermessungen übereinstimmen (Greiner: μ_{760} zwischen 4,5 und $0,7 \text{ cm}^{-1}$, Nebelkammer: $\mu_{760} \sim 2 \text{ cm}^{-1}$). Desgleichen ist auch der Absorptionskoeffizient für die Sauerstoffstrahlung in O_2 sowohl nach Zählrohrmessungen sowie nach Nebelkammerbeobachtungen größer als der für H_2 und Luft. Diese Übereinstimmung der Absorptionskoeffizienten einmal gemessen durch Druckvariation im Zählrohr, ein anderes Mal durch eine Statistik der Absorptionsprozesse in der Nebelkammer deutet auf eine gleiche Strahlung hin.

Diese Gleichheit der Absorptionskoeffizienten deutet darauf hin, daß in meinen durch die Kondensationssubstanz verunreinigten Gasen doch im wesentlichen der richtige Absorptionskoeffizient gemessen worden ist. Dies ist verständlich, da sicherlich die Absorption der kurzwelligen Quanten nur dann merklich ist, wenn sie nahezu die Ionisierungsenergie haben. Es werden also z. B. in H_2 die H_2O -Moleküle nur die Quanten von einer Energie gleich oder wenig größer als 13 Volt stark absorbieren. Eine solche Strahlung ist sicher auch im Spektrum vorhanden, da aber z. B. in H_2 von 455 Torr nur etwa 13 Torr H_2O -Dampf enthalten sind, werden diese wenigen Lawinen die Verteilung nicht wesentlich beeinflussen.

B. Über die trägererzeugende Wirkung des Funkenlichtes in Gasen sind zuerst von Lenard Beobachtungen mitgeteilt worden²⁾. Danach soll diese gasionisierende Strahlung auch hinter einem 1 mm dicken Flußspat-

¹⁾ E. Greiner, ZS. f. Phys. **81**, 543, 1933. — ²⁾ Vgl. Handb. d. Exp. Phys. **23**, 2, S. 1427.

fenster wirksam sein und Träger erzeugen. Die Nebelkammerbeobachtungen ergeben jedoch, daß weder in Luft noch in H_2 hinter einer 0,4 mm dicken Flußspatplatte so kurzwellige Lichtquanten auftreten. — Greiner findet ebenfalls hinter einer 1 mm dicken Flußspatplatte keine Ausbreitung von Entladungen mehr. Varney und Loeb¹⁾ stellen gleichfalls fest, daß durch Flußspat eine gasionisierende Strahlung nicht hindurchgeht.

C. Auf Grund von Zählrohrmessungen gibt Christoph²⁾ Absorptionskoeffizienten für die Strahlung einer (stationären) Coronaentladung an, die jedoch sowohl für H_2 als auch für Luft 20mal größer als die oben mitgeteilten sind. Diese stark absorbierbare Strahlung soll die Nachlieferungselektronen für die Zählrohrentladung liefern. Bei Greiner sowohl wie bei mir käme diese Strahlung infolge ihrer hohen Absorbierbarkeit nicht zur Beobachtung, so daß in dieser Hinsicht kein Widerspruch besteht. Ungeklärt ist jedoch der Wellenlängenbereich dieser Strahlung. Da sie kaum kürzerwellig als die oben mitgeteilte gasionisierende Strahlung sein kann, bleibt nur eine längerwellige, größer als 1000 Å, übrig. Diese das Gas nicht mehr ionisierende Strahlung hätte dann einen größeren Absorptionskoeffizienten im Gas als die gasionisierende. Dieses Ergebnis bedarf noch der Klärung.

Wie wir unter c) sehen werden, macht eine Abschätzung wahrscheinlich, daß eine Zählrohrentladung in H_2 sich ihre Nachlieferungselektronen allein schon mit der gasionisierenden Strahlung erzeugt.

Weitere Bemerkungen.

a) *Zur Anregung der Strahlung.* Während im Zählrohr die Anregungsverhältnisse der Strahlung einfacher liegen, da infolge der hohen Weglängenspannungen in unmittelbarer Nähe des Drahtes (sie übersteigen sogar die Ionisierungsspannungen) die Anregung dieser kurzwelligen Strahlung möglich ist, liegen die Verhältnisse im ebenen Feld nicht so günstig, da im ungestörten (elektrostatischen) Feld die Weglängenspannungen kleiner als die Ionisierungsspannungen sind. Vermutlich wird hier die positive Raumladung in der Funkenstrecke eine Erhöhung der Weglängenspannung bewirken, so daß zusammen mit der Energieakkumulation der Elektronen über mehrere Weglängen diese Strahlung mit großer Ausbeute in einem Stoß angeregt werden kann. [Es ist fraglich, ob die Ionendichte ausreicht, um die Anregung dieses extrem kurzwelligen UV in zwei Stufen (Anregung des ionisierten Moleküls) zu bewirken].

¹⁾ R. N. Varney und L. B. Loeb, Phys. Rev. **48**, 822, 1936. —

²⁾ W. Christoph, Ann. d. Phys. **30**, 446, 1937.

b) *Die geradlinige Ausbreitung der gasionisierenden Strahlung.* Greiner glaubte die verhältnismäßig große Reichweite der kurzwelligen Strahlung dadurch zu erklären, daß die Quanten in Resonanz absorbiert und wieder ausgestrahlt werden. Die Nebelkammeraufnahmen zeigen aber, daß die Spuren im wesentlichen längs des ausgeblendeten Lichtbündels aufgereiht sind, die Ausbreitung des Lichtes also geradlinig erfolgt.

c) *Über den Ort der Elektronenauslösung in den Ausbreitungsversuchen von Zählrohrentladungen.* Zur Intensität des hierbei ausgestrahlten kurzwelligen Lichtes. Es ist sehr wahrscheinlich, daß bei der Ausbreitung einer Zählrohrentladung in das benachbarte Rohr die Elektronenauslösung im zweiten Rohr hauptsächlich im Gas erfolgt. Es lassen sich wenigstens diese Versuche ohne Schwierigkeiten von diesem Standpunkt aus diskutieren. Die Auslösung an der Wand wird deshalb von geringem Einfluß sein, weil die Elektronenausbeute der gasionisierenden Quanten im Gegensatz zum Gas im Metall der Kathode kleiner als Eins ist. Im Gebiet von 800 bis 1200 Å hat Kenty¹⁾ diese Ausbeute der Elektronen pro Lichtquant gemessen und sie an Nickelflächen zu etwa $1 \cdot 10^{-2}$ bestimmt. Wenn also in der Greinerschen Versuchsanordnung die Intensität der kurzwelligen Strahlung durch die eingeschaltete Zelluloidfolie oder den Gasdruck soweit herabgedrückt worden ist, daß sie mit einer Wahrscheinlichkeit nahezu Eins das benachbarte Rohr zündet, dann wird diese Zündung infolge der viel größeren Ausbeute durch Photoionisation im Gas erfolgen.

Der eben angeführte Grund ist auch die Ursache dafür, daß nach Einschalten einer dickeren Zelluloidfolie oder Verwendung eines höheren Gasdruckes die Ausbreitung der Entladung unterdrückt werden kann, obgleich das sicher vorhandene, langwelligere UV (sowie Flußspat und Quarz UV) dadurch fast gar nicht absorbiert wird. Berücksichtigt man nämlich deren nochmals geringere Elektronenausbeute im Wandmetall gegenüber den kurzwelligen Quanten, so müßte deren Anzahl schon mehrere Größenordnungen höher sein als die der kurzwelligen Quanten, um die Entladung im zweiten Zählrohr zu zünden. Das langwelligere UV wird also nicht mit erheblich größerer Intensität angeregt als das kurzwellige.

Wir können aus der Tatsache, daß hinter $1,3 \cdot 10^{-5}$ cm Zelluloidfolie die Ausbreitung in das zweite Zählrohr in H_2 noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 geschieht, schließen, daß also mindestens ein Quant unter diesen Bedingungen übertritt. Da $\mu_{\text{Zelluloid}} \simeq 10^6$ beträgt, so entstehen im ersten Zählrohr etwa 10^5 kurzwellige Quanten (in Luft etwa 1000mal weniger).

¹⁾ C. Kenty, Phys. Rev. **44**, 891, 1933.

Da etwa 10^8 Elektronen während der Entladung übergehen, so haben wir eine beträchtliche Ausbeute an kurzwelligen Quanten, die es verständlich macht, daß die Nachlieferungselektronen einer Zählrohrentladung in H_2 durch diese kurzwellige Strahlung erzeugt werden.

d) *Zur Erzeugung der Leitfähigkeit der Ionosphäre durch kurzwelliges Sonnenlicht.* Bekanntlich nimmt man zur Erzeugung der elektrischen Leitfähigkeit der Ionosphäre eine Ionisierung dieser Luftschichten durch eine kurzwellige Sonnenstrahlung an. Die Frage war jedoch offen, ob eine gasionisierende Strahlung überhaupt noch hinreichend bis in etwa 100 km Höhe (E-Schicht) eindringen kann. Nimmt man, mangels einer besseren Annahme, die Druckverteilung einer isothermen Atmosphäre von 273^0 an, so findet die maximale Absorption der Lichtquanten in einer Höhe von ~ 100 km statt, wenn man einen Absorptionskoeffizienten von 1 bis 2 cm^{-1} zugrunde legt. Meine Messungen zeigen, daß eine Luft bzw. H_2 ionisierende Strahlung Absorptionskoeffizienten der verlangten Größe hat, so daß die Entstehung der elektrischen Leitfähigkeit dieser Schichten durch so kurzwelliges Sonnenlicht wohl möglich ist.

Für die Bereitstellung der Institutsmittel danke ich Herrn Prof. H. Kulenkampff, ebenso für die Anfertigung eines dünnen Flußspatplättchens Herrn Dr. P. Wagner (Mineralogisches Institut) und für eine große Bogenlampe der Fa. C. Zeiss.

Jena, Physikalisches Institut, Juli 1938.

Zur Theorie des Spins.

Von W. Wessel in Jena.

(Eingegangen am 8. August 1938.)

Die klassische Elektronentheorie erlaubt, die Rückwirkung der Strahlung auf ein bewegtes Elektron durch eine Reaktionskraft zu beschreiben, die die Bewegungsvariablen nur in universeller Form (unabhängig von den Potentialen äußerer Kräfte) enthält. Da sie von der Änderung der Beschleunigung abhängt, bedingt diese Kraft eine Abänderung der Kinematik im Sinne des Auftretens von neuen Variablen. Es wird versucht, diese Reaktionskraft in die Quantenmechanik zu übertragen und dazu eine kanonische Zuordnung und Quantelung der neuen Variablen durchgeführt. Die gefundene quantentheoretische Kinematik ist gerade die des Diracschen Spinelektrons; man kann so ohne andere hypothetische Elemente als Vertauschungsrelationen den Elektronenspin aus der klassischen Theorie herleiten.

Die vorliegende Arbeit geht, wie schon eine frühere¹⁾, von dem Versuch aus, die aus der Elektronentheorie bekannte *Reaktionskraft der Strahlung* für die Quantenmechanik nutzbar zu machen. Man versteht darunter eine fingierte Kraft, die einem ungleichförmig bewegten Elektron zwischen zwei Zeitpunkten soviel Energie entzieht, wie es während der inzwischen ausgeführten Bewegung durch Ausstrahlung verlieren würde. Der Vorteil ihrer Einführung liegt darin, daß man aller feldmäßigen Betrachtungen enthoben wird, weil sie, ähnlich wie eine Coriolis- oder Zentrifugalkraft, in universeller Form durch die Bewegungsvariablen gegeben ist und die Potentiale äußerer Kräfte nicht enthält.

Eine Erwartung, die sich mit diesem Versuch verknüpft, ist, wie auch schon auseinandergesetzt wurde, die folgende. Die gewöhnlichen mechanischen Bewegungsgleichungen enthalten höchstens Beschleunigungen, d. h. *zweite* zeitliche Ableitungen. Bringt man sie auf die kanonische Form, was man tun muß, um konjugierte Variable und Vertauschungsrelationen einzuführen, so bekommt man pro Freiheitsgrad soviel Variable, wie die Zahl der zeitlichen Ableitungen beträgt, also *zwei*, Koordinaten und Impulse. Die Strahlungskraft enthält aber Ableitungen bis zur *dritten*. Wenn es gelingt, sie zu „kanonisieren“, muß man außer Koordinaten und Impulsen noch Variable *dritter* Art bekommen, und es wurde versucht, zwischen diesen und den in Paulis oder Diracs Theorie des Elektronenspins neu auftretenden Variablen einen Zusammenhang herzustellen.

¹⁾ W. Wessel, ZS. f. Phys. **92**, 407, 1934.

In der vorangehenden Arbeit wurden die klassischen Bewegungsgleichungen mit Reaktionskraft zerlegt in ein System von Gleichungen erster Ordnung mit Nebenbedingungen. Dabei wurde die kanonische Form noch nicht erreicht, sondern nur durch eine Ähnlichkeit zwischen den Bewegungsgleichungen plausibel gemacht, daß ein aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gebildeter Tensor einem gewissen Diracschen Tensor entspräche. Was die mögliche Existenz einer Hamiltonschen Funktion betraf, wurde nur betont, daß zwar nicht die Energie, wohl aber die Ruhmasse zeitunabhängig sei und daher stets ein zeitfreies Integral der Bewegungsgleichungen existiere. Wir können nun zeigen, daß sich im Falle der Abwesenheit äußerer Kräfte tatsächlich eine Lagrangesche und Hamiltonsche Funktion zu den transformierten Bewegungsgleichungen angeben läßt. Das Nullsetzen der äußeren Kräfte macht das Problem keineswegs absurd oder trivial. Allerdings kann die Reaktionskraft der Strahlung erst in Wirksamkeit treten, d. h. die Energie verändern, wenn der bewegten Ladung durch äußere Kräfte eine Bewegungsänderung aufgezwungen wird; aber der analytische Ausdruck für die Reaktionskraft bleibt vollständig in den Gleichungen stehen, auch wenn die Potentiale verschwinden, weil er eben *universell* von den Bewegungsvariablen abhängt. Man wird dadurch in die Lage versetzt, noch vor Inangriffnahme des schwierigen, nichtkonservativen Problems alle Folgerungen *kinematischer* Art zu ziehen, die sich aus dem Auftreten neuer Variablen ergeben, nämlich Einführung von kanonischen Impulsen und Vertauschungsrelationen.

Das ist aber gerade, was man braucht, um den Zusammenhang mit der Diracschen Theorie herzustellen. Die physikalische Bedeutung der Diracschen Variablen, soweit sie überhaupt bekannt ist, geht bei den Variablen *mechanischer* Natur — Geschwindigkeit und Spin — bereits aus der kräftefreien Hamilton-Funktion hervor. Der Tensor des magnetischen bzw. elektrischen Moments kann naturgemäß erst bei Hinzunahme äußerer Felder gedeutet werden, baut sich aber aus den mechanischen Variablen auf. Ihre *Vertauschungsrelationen* sind ganz von den Feldstärken unabhängig. Wenn wir also nachweisen können, daß unsere Hamiltonfunktion im kräftefreien Falle mit der Diracschen übereinstimmt, und daß die eingehenden neuen Variablen die richtige Bedeutung haben und die richtigen Vertauschungsrelationen erfüllen, so ist damit die Übereinstimmung in kinematischer Hinsicht vollständig dargetan.

Dieser Nachweis läßt sich wirklich führen und bildet den Inhalt der nachstehenden Ausführungen. Ein wesentlicher Zug dieser Analyse, der sie ziemlich erschwert, aber physikalisch besonders befriedigend macht,

ist der, daß der Zusammenhang zwischen Spin und Strahlungskraft nicht umkehrbar eindeutig ausfällt. Die Variablen, die man zur Beschreibung der Strahlungskraft braucht und die dann den Spin ergeben, haben einen über den Zweck ihrer Einführung hinausgehenden Grad von Selbständigkeit und unterliegen einem gewissen universellen System von Bewegungsgleichungen auch noch, wenn die Strahlungskraft verschwindet. Dies muß erwartet werden, weil der Spin eine allgemeinere Eigenschaft der Elementarteilchen ist, als das Strahlungsvermögen, das im wesentlichen von der *Ladung* abhängt. Wir erhalten auch außer der Diracschen Gleichung noch weitere Gleichungen für Partikel mit dem Spin $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ usw., die aber nur die Bedeutung von Zwischenzuständen zu haben scheinen.

1. *Einführung von Impulsen, die zu den Lagenkoordinaten konjugiert sind.* Wir gehen aus von der Form der Bewegungsgleichungen, die wir ihnen a. a. O. in (3), (12), (15) und (17) gegeben haben. Zur Vermeidung von lästigen Faktoren c wollen wir jedoch alle Geschwindigkeiten hinfort in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit rechnen, also u_i/c durch u_i ersetzen. Nach Definition der Vierergeschwindigkeit ist $u_i^2 = -1$. Die Ausgangsgleichungen lauten dann

$$\frac{dx_i}{d\tau} = u_i, \quad (1)$$

$$\frac{du_i}{d\tau} = -\frac{e}{mc} s_{ik} u_k, \quad (2)$$

$$\frac{ds_{ik}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} (s_{ik} - G_{ik}), \quad (3)$$

mit den Abkürzungen

$$\varepsilon = \frac{2e^2}{3mc^3} = 0,628 \cdot 10^{-23} \text{ sec}, \quad (4)$$

$$G_{ik} = u_l (u_i F_{kl} - u_k F_{il}) \quad (5)$$

und den Nebenbedingungen

$$s_{ik} s_{kl} u_l - u_i (s_{kl} u_l)^2 = 0. \quad (6)$$

Die F_{ik} sind äußere elektromagnetische Feldstärken, die s_{ik} die mechanischen Variablen dritter Art; beide Tensoren sind antisymmetrisch. Bei der gewählten Normierung haben auch die s_{ik} die Dimension von Feldstärken.

Bevor wir darangehen, diese Gleichungen in die kanonische Form zu setzen, erinnern wir daran, daß sie nur ableitbar sind unter Voraussetzungen über die Änderungsgeschwindigkeit des Bewegungszustandes.

Bei kleinen Geschwindigkeiten können wir kurz sagen, daß die Beschleunigungen klein bleiben müssen gegen diejenige, die ein Elektron im Felde $m^2 c^4 / e^3$ erfährt; das ist das Feld, das bei Coulombschem Kraftgesetz „an der Oberfläche“ eines Elektrons herrschen würde. Die zugehörige Beschleunigung ist der Größenordnung nach gegeben durch

$$b_0 = \frac{c}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Man muß die Möglichkeit im Auge behalten, daß sich bei Vorhandensein äußerer Kräfte die Gleichungen nur dann kanonisieren lassen, wenn man bei sehr großen Beschleunigungen Abänderungen zuläßt, beispielsweise der Art, daß ε durch $\varepsilon \sqrt{1 + b^2/b_0^2}$ ersetzt wird ($b^2 = \dot{u}_i^2 c^2$). Wir brauchen in dieser Arbeit keine solche Annahme zu machen, aber auch nicht vorauszusetzen, daß ε konstant sei.

Der erste Schritt zu einer Kanonisierung wird darin bestehen, daß man zu den Lagenkoordinaten (Weltkoordinaten) $x_1 \dots x_4$ konjugierte Impulse $p_1 \dots p_4$ aufsucht. Die Hamiltonsche Funktion kann von den x_i nur abhängen durch die Potentiale äußerer Felder. Wir müssen also

$$\frac{dp_i}{d\tau} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

erwarten, wenn wir äußere Felder, d. h. die F_{ik} und damit die G_{ik} , gleich Null setzen. Dann ergibt sich aber aus (2), daß die u_i nicht, wie in der gewöhnlichen Theorie, Impulse sein können, weil eben \dot{u}_i nicht verschwindet.

Allerdings reduziert sich dann (3) auf $\dot{s}_{ik} = \frac{1}{\varepsilon} s_{ik}$, und man wird erwarten müssen, daß mit den F_{ik} auch die s_{ik} gegen Null gehen, womit dann aus (2) $u_i = \text{const}$ folgen würde. Das wird sich auch später als Folge der kanonischen Gleichungen ergeben. Aber zur Aufstellung eines Variationsprinzips müssen wir von den *Differentialgleichungen* oder ihren *allgemeinen* Lösungen ausgehen, nicht von einem partikulären Integral. Dieser Sachverhalt war in der Einleitung gemeint, als gesagt wurde, daß das Nullsetzen äußerer Felder den Ausdruck für die Strahlungskraft nicht beeinflusste.

Bei verschwindenden F_{ik} bzw. G_{ik} lassen sich die Bewegungsgleichungen vollständig integrieren. [Gleichung (2) wird, wenn man die s_{ik} einsetzt, ein lineares System mit einfachen Koeffizienten. Vgl. auch Abschnitt 6, a. a. O.] Wir wollen aber die Möglichkeit von Abänderungen in (3) offen lassen und uns überhaupt nicht von vornherein auf $F_{ik} = 0$ festlegen; übrigens ist auch dann die systematische Integration umständlich wegen

der Nebenbedingungen und wenig geeignet zur Auffindung von Integralen in Form eines Vierervektors. Dagegen kommt man zum Ziele, wenn man von den *Nebenbedingungen* (6) ausgeht. Diese bestimmen, vier an der Zahl, die u_i offenbar sehr weitgehend und sind selbst schon partikuläre Integrale der Bewegungsgleichungen, auch für nichtverschwindende F_{ik} .

Der Beweis hierfür liegt in ihrer Ableitung, kann aber unschwer auch direkt geführt werden. Bezeichnet man die in (6) gleich Null gesetzten Größen einmal mit c_i , so folgt bei Berücksichtigung der Antisymmetrie von s_{ik} ($u_k s_{kl} s_{lm} s_{mn} u_n \equiv 0$) nach einiger Rechnung, für $F_{ik} = 0$,

$$\dot{c}_i = \frac{2}{\varepsilon} c_i - \frac{e}{mc} s_{ik} c_k, \quad (9)$$

was mit $c_i = 0$ offenbar verträglich ist. Um dieselbe Formel für $F_{ik} \neq 0$ zu bekommen, muß man s_{ik} in der Form $b_i u_k - b_k u_i$ ansetzen, wobei b_i ein beliebiger Vektor ist. Die s_{ik} genügen dann der Beziehung

$$s_{ik} s_{ik}^* \equiv 0 \quad (10)$$

(s_{ik}^* dualer Tensor). Diese Bedingung ist für das Spätere im Auge zu behalten.

Wir versuchen nun einmal, die Nebenbedingungen nach der Vierergeschwindigkeit aufzulösen. Es ist zweckmäßig, dazu von der Tensor- zur Vektorform überzugehen. Es sei

$$\left. \begin{aligned} (s_{23}, s_{31}, s_{12}) &= \mathfrak{M}, & (s_{41}, s_{42}, s_{43}) &= i\mathfrak{P}, \\ (u_1, u_2, u_3) &= \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dann läßt sich aus (6) schließen

$$\left[\mathfrak{P} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{M} \right], \mathfrak{M} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{P} \right] \right] = 0. \quad (12)$$

Um diese Gleichung zu lösen, machen wir den Ansatz

$$\frac{v}{c} = \lambda \mathfrak{P} + \mu \mathfrak{M} + \nu [\mathfrak{P} \mathfrak{M}], \quad (13)$$

wobei wir annehmen, daß die Vektoren \mathfrak{P} und \mathfrak{M} nicht parallel sind. Setzen wir (13) in (12) ein und setzen wir die Koeffizienten von \mathfrak{P} , \mathfrak{M} und $[\mathfrak{P} \mathfrak{M}]$ gleich Null, so erhalten wir eine quadratische Gleichung für ν und zwei homogene, lineare für λ und μ , deren Determinante verschwindet, wenn die Gleichung für ν erfüllt ist. Es bleibt also ein Faktor (u) unbestimmt, und zwar ergibt sich

$$\frac{v}{c} = \frac{[\mathfrak{P} \mathfrak{M}] + u (W_1 \mathfrak{P} + W_2 \mathfrak{M})}{\frac{1}{2} (P^2 + M^2) + \frac{1}{2} (W_1^2 + W_2^2)}. \quad (14)$$

Dabei bedeutet

$$W_1 = \sqrt{\pm \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} (M^2 - P^2)}, \quad W_2 = \sqrt{\pm \frac{1}{2} W^2 + \frac{1}{2} (M^2 - P^2)} \quad (15)$$

$$W^2 = \sqrt{(M^2 - P^2)^2 + 4 (\mathfrak{P} \mathfrak{M})^2}. \quad (16)$$

Die Ausdrücke (15) und (16) sind Invarianten; man kann die beiden Invarianten des Tensors s_{ik} durch sie ausdrücken in der Form

$$\frac{i}{4} s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}^* = \mathfrak{P} \mathfrak{M} = W_1 W_2, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} s_{\mu\nu} s_{\mu\nu} = M^2 - P^2 = W_2^2 - W_1^2. \quad (18)$$

Hiernach erhalten wir, für $F_{ik} = 0$, sofort vier Integrale, die einen Vierervektor bilden, aus der Transformationseigenschaft der u_i . Der Vektor \mathfrak{p}/c ist aus kovarianten Gleichungen hervorgegangen; die damit nach (11) zu berechnenden $u_1 \dots u_4$ müssen also diese Gleichungen auch dann erfüllen, wenn wir die $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ einer Lorentz-Transformation entsprechend einer Geschwindigkeit cU_i unterwerfen. Nun haben die $u_1 \dots u_4$, so, wie sie sich nach (11) und (14) durch die $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ ausdrücken, noch nicht die Form eines Vierervektors. Wenn man also eine Lorentz-Transformation darauf ausübt, fallen die U_i nicht heraus. Die $u_1 \dots u_4$ nehmen aber dann die Form eines Vierervektors an und drücken sich als solcher kovariant durch die U_i und s_{ik} aus. Ihre ursprünglichen Ausdrücke bezogen sich also auf ein System mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0, U_4 = i$. — Die linearen Gleichungen lassen sich nach den U_i auflösen. Damit hat man die gewünschten vier Integrale der kräftefreien Bewegungsgleichungen erhalten. Da sie gleichförmigen Translationen des Systems entsprechen, haben die durch Multiplikation der cU_i mit der Ruhmasse m gebildeten Größen

$$p_i = m c U_i \quad (19)$$

die Natur von *Impulsen*. Wir werden demgemäß das System mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ als das *Schwerpunktssystem* bezeichnen. Die Bezeichnung „Ruhsystem“ ist nicht angebracht, weil die durch (1) definierte Vierergeschwindigkeit darin nicht verschwindet.

2. *Rechenregeln und Durchführung der Auflösung.* Mit einer Lorentz-Transformation gleichbedeutend ist es, wenn wir einen kovarianten, in den U_i linearen Ausdruck aufsuchen, der für $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ in die eben berechneten u_i übergeht. Er muß jedenfalls bis auf einen Faktor Q lauten:

$$Q u_i = W_2^2 U_i + u (W_1 s_{ik} - i W_2 s_{ik}^*) U_k + s_{ik} s_{kl} U_l, \quad (20)$$

denn das Verhältnis iu_j/u_4 , $j = 1, 2, 3$, liefert für $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ gerade die Komponenten von \mathbf{v}/c in (14). Wir haben nun U_i aufzufassen als dX_i/dT , wobei dX_i eine Verrückung des Schwerpunktssystems und dT das zugehörige Element seiner Eigenzeit bedeutet. Dies ist gegeben durch $ic dT = \sqrt{dX_i^2}$ und im allgemeinen von $ic d\tau = \sqrt{dx_i^2}$ verschieden. In jedem Falle gilt aber $U_i^2 = u_i^2 = -1$, und diese Bedingung legt den Faktor Q in (20) fest. Es ist bequemer, ihn erst später auszurechnen und zuvor die Auflösung von (20) nach den U_i vorzubereiten. Wir bilden dazu die Ausdrücke $s_{ik} u_k$, $s_{ik}^* u_k$ und $s_{ik} s_{kl} u_l$. Dabei entstehen Produkte mit mehr als zwei Faktoren s_{ik} . Solche Bildungen lassen sich immer auf Produkte mit einem oder zwei Faktoren und invarianten Koeffizienten zurückführen nach folgenden beiden Identitäten für antisymmetrische Tensoren (siehe die mathematischen Ergänzungen in Abschnitt 12):

$$s_{ki}^* s_{kj} = \frac{1}{4} \delta_{ij} (s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu}), \quad (21)$$

$$s_{ki} s_{kj} + s_{ki}^* s_{kj}^* = \frac{1}{2} \delta_{ij} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}). \quad (22)$$

Z. B. reduziert man nach (22)

$$s_{ik} s_{kl} s_{lm} = -\frac{1}{2} s_{im} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}) - s_{ik}^* s_{kl}^* s_{lm}$$

und nach (21) weiter

$$\begin{aligned} s_{ik} s_{kl} s_{lm} &= -\frac{1}{2} s_{im} (s_{\mu\nu} s_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} s_{im}^* (s_{\mu\nu}^* s_{\mu\nu}) \\ &= (W_1^2 - W_2^2) s_{im} - i W_1 W_2 s_{im}^*, \end{aligned}$$

das Letzte nach (17) und (18).

Mit diesen Regeln und weiterer Heranziehung von (17) und (18) berechnen wir folgendes Schema:

	$W_2^2 U_i$	$W_1 s_{ik} U_k$	$-i W_2 s_{ik}^* U_k$	$s_{ik} s_{kl} U_l$	
$Q u_i$	1	u	u	1	
$Q s_{ik} u_k / W_1$	u	1	1	u	(23)
$Q s_{ik}^* u_k / i W_2$	u	1	1	u	
$Q s_{ik} s_{kl} u_l / W_1^2$	1	u	u	1	

Die erste Zeile bedeutet Gleichung (20); die übrigen sind entsprechend zu lesen. Aus der Übereinstimmung der ersten und vierten Zeile folgt

$$s_{ik} s_{kl} u_l = W_1^2 u_i \quad (24)$$

oder wegen (6)

$$(s_{kl} u_l)^2 = W_1^2. \quad (25)$$

Diese Folgerung kann auch direkt aus den Nebenbedingungen abgeleitet werden. Ebenso folgt aus der Gleichheit der zweiten und dritten Zeile:

$$W_2 s_{ik} u_k + i W_1 s_{ik}^* u_k = 0. \quad (26)$$

Dies ist, im Verein mit (25), eine andere Form der Nebenbedingungen. Der Rang des Gleichungssystems (23) ist 2; man kann etwa das zur linken, oberen, zweireihigen Determinante gehörige Gleichungssystem herausgreifen und auflösen. Es zeigt sich dann, daß auch die U_i , wenn man sie auf -1 normiert, den Gleichungen (25) und (26) genügen. Indem wir das gleich präsumieren, können wir die beiden ersten Zeilen von (23) auch so schreiben:

$$\left. \begin{aligned} Qu_i &= (W_1^2 + W_2^2) (U_i + u s_{ik} U_k/W_1), \\ Q s_{ik} u_k/W_1 &= (W_1^2 + W_2^2) (u U_i + s_{ik} U_k/W_1). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Nunmehr ist es leicht, Q so zu bestimmen, daß $U_i^2 = -1$ wird. Man findet durch Quadrieren einer der beiden Gleichungen und Anwendung von (25) auf U_i , mit Beachtung von $U_i s_{ik} U_k \equiv 0$:

$$Q = (W_1^2 + W_2^2) \sqrt{1 - u^2}. \quad (28)$$

Wir setzen noch

$$u = \text{Tang } \vartheta \quad (29)$$

und haben dann an Stelle von (27)

$$\left. \begin{aligned} u_i &= U_i \text{Cos } \vartheta + s_{ik} U_k/W_1 \cdot \text{Sin } \vartheta, \\ s_{ik} u_k/W_1 &= U_i \text{Sin } \vartheta + s_{ik} U_k/W_1 \cdot \text{Cos } \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Hieraus folgt durch Umkehrung

$$\left. \begin{aligned} U_i &= u_i \text{Cos } \vartheta - s_{ik} u_k/W_1 \cdot \text{Sin } \vartheta \\ s_{ik} U_k/W_1 &= -u_i \text{Sin } \vartheta + s_{ik} u_k/W_1 \cdot \text{Cos } \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Man sieht leicht, daß, wie vorausgenommen, die U_i allen Bedingungen der u_i genügen.

Wir haben hiermit die Vierergeschwindigkeit u_i bis auf die noch unbekannte Größe ϑ allein aus den Nebenbedingungen berechnet. Diese Größe ist nun so zu bestimmen, daß die u_i ihre Differentialgleichung (2) erfüllen. Bei verschwindenden F_{ik} muß das bei konstanten U_i der Fall sein; bei nichtverschwindenden F_{ik} sind die U_i zu variieren, d. h. ist das Schwerpunktssystem so nachzuführen, daß beständig die Gleichungen (30) bzw. (31) bestehen bleiben. Von nun an beschränken wir uns auf kräftefreie Bewegung, setzen also $F_{ik} = 0$, $G_{ik} = 0$. Nach (3) und der Bedeutung (15) von W_1 sind dann die $s_{ik} U_k/W_1$ als homogene Funktionen

nullten Grades der s_{ik} konstant (auch wenn ε nicht konstant ist!). Wir haben also einfach

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_i &= \{ U_i \operatorname{Sin} \vartheta + s_{ik} U_k / W_1 \cdot \operatorname{Cos} \vartheta \} \dot{\vartheta} \\ &= s_{ik} u_k / W_1 \cdot \dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit Gleichung (2), wenn wir setzen

$$\dot{\vartheta} = - \frac{e}{m c} W_1. \quad (33)$$

Hiermit ist der erste Teil unserer Aufgabe erledigt: Wir haben in $mc U_i$ einen Vierervektor gefunden, der bei verschwindenden äußeren Kräften zeitlich konstant ist und dessen Komponenten daher als kanonische Konjugierte zu den vier Weltkoordinaten $x_1 \dots x_4$ eingeführt werden können. Wie in der Diracschen Theorie haben wir zwei Geschwindigkeiten U_i und u_i ganz verschiedener Bedeutung nebeneinander.

3. *Aufstellung der Lagrangeschen Funktion.* Die Impulse sollen aus einer Lagrangeschen Funktion ableitbar sein:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}. \quad (34)$$

Führen wir $p_k = mc U_k$ und $\dot{x}_k = c u_k$ ein, so bedeutet das

$$U_k = \frac{1}{m c^2} \frac{\partial L}{\partial u_k}. \quad (35)$$

Wir machen den Ansatz

$$L = \frac{m c^2}{2} u_k^2 \operatorname{Cos} \vartheta \quad (36)$$

und finden

$$U_i = u_i \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{1}{2} u_k^2 \operatorname{Sin} \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u_i}. \quad (37)$$

Soll das mit der ersten Gleichung (31) übereinstimmen, so muß

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = - \frac{2 s_{ik} u_k}{u_i^2 W_1} \quad (38)$$

sein. Es ist nicht einfach, eine Funktion ϑ zu finden, aus der diese Gleichung hervorgeht — auch wenn man die zu erfüllende Bewegungsgleichung (33) vorläufig ganz außer acht läßt — weil s_{ik} antisymmetrisch ist und daher $s_{ik} u_i u_k$ verschwindet. Es gelingt erst, wenn man an Stelle von s_{ik} einen neuen Tensor r_{ik} einführt, durch den sich s_{ik} quadratisch ausdrückt. Um die Antisymmetrie zu wahren, machen wir den Ansatz

$$s_{ik} = p (r_{io} r_{\sigma\tau} u_\tau u_k - r_{ko} r_{\sigma\tau} u_\tau u_i). \quad (39)$$

Die r_{ik} sollen, um die Variablenzahl nicht zu erhöhen, wieder antisymmetrisch sein; p ist ein Skalar, dessen Wahl wir uns noch vorbehalten. Der Klammerausdruck in (39) ist, wie nachher hervortreten wird — vgl. die mathem. Ergänzungen zu (89) — der *einzigste* seiner Art, der sich nicht auf Linearform bringen läßt und nicht auf u_i senkrecht steht [was mit (38) unvereinbar wäre].

Dieser Tensor s_{ik} kann als $b_i u_k - b_k u_i$ aufgefaßt werden und erfüllt daher auch die Gleichung (10) als eine Identität. Dem geometrischen Sinne des dualen Tensors entsprechend stehen die Vektoren b_i und u_i , die s_{ik} als Flächengröße aufspannen, auf s_{ik}^* senkrecht, also ist insbesondere $s_{ik}^* u_k = 0$. Laut (26) verschwindet damit W_2 . Soll W_1 in (15) von Null verschieden und reell sein, so muß

$$\mathfrak{P}^2 > \mathfrak{M}^2 \quad (40)$$

sein und das obere Vorzeichen gewählt werden. Das Verschwinden von $s_{ik}^* u_k$ bedeutet in Vektoren

$$\mathfrak{M} + \left[\mathfrak{P} \frac{\mathbf{v}}{c} \right] = 0. \quad (41)$$

\mathfrak{M} steht also auf \mathfrak{P} und auf der Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht. — Der Ansatz (39) ist der wichtigste Schritt auf dem Wege zur kanonischen Form. Die Variablen r_{ik} werden nachher für den „Spin“ bestimmend sein. Wir heben im Hinblick auf das am Schluß der Einleitung Gesagte hervor, daß zwar der Tensor s_{ik} durch die r_{ik} , aber nicht umgekehrt der Tensor r_{ik} durch die s_{ik} ausdrückbar ist; denn in (39) gehen nur die vierkomponentigen $r_{io} r_{o\tau} u_\tau$ ein.

Um zu zeigen, daß mit dem Ansätze (39) die Gleichung (38) integrabel wird, führen wir einige Abkürzungen ein. Es sei

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} r_{\mu\nu} r_{\mu\nu} &= A, \\ \frac{i}{4} r_{\mu\nu}^* r_{\mu\nu} &= B, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ferner

$$\left. \begin{aligned} u_i^2 &= x, \\ r_{io} r_{i\tau} u_o u_\tau &= y. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Wir haben dann

$$\left. \begin{aligned} s_{ik} u_k &= p (r_{io} r_{o\tau} u_\tau x + u_i y) \\ W_1 &= \sqrt{|M^2 - P^2|} = \sqrt{\frac{1}{2} |s_\mu, s_\mu|} = p \sqrt{y^2 - 2Axy - B^2 x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

das Letzte nach Umformungen unter Anwendung der Identitäten (21) und (22) auf die r_{ik} , und Gleichung (38) wird

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = - \frac{2}{x} \frac{r_{io} r_{ot} u_t x + u_i y}{\sqrt{y^2 - 2 A x y - B^2 x^2}}. \quad (45)$$

Nun kann ϑ von u_i nur abhängen durch x und y ; es gilt also

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u_i} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} 2 u_i - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} 2 r_{io} r_{ot} u_t. \quad (46)$$

Der Vergleich von (45) und (46) liefert

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{-y/x}{\sqrt{y^2 - 2 A x y - B^2 x^2}}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2 A x y - B^2 x^2}}. \quad (47)$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind hier tatsächlich erfüllt. Man erhält

$$\vartheta = \text{Ar Cot} \frac{\frac{y}{x} - A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \vartheta_0 \quad (48)$$

(ϑ_0 Integrationskonstante). Mit der weiteren Abkürzung

$$z = \sqrt{y^2 - 2 A x y - B^2 x^2} \quad (49)$$

wird schließlich nach (36)

$$L = \frac{m c^2}{2} \frac{(y - A x) \text{Cot} \vartheta_0 + z \text{Sin} \vartheta_0}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (50)$$

Mit der Gewinnung von (50) ist unser Programm, soweit es sich um den Zusammenhang der $p_1 \dots p_4$ und $x_1 \dots x_4$ handelt, im wesentlichen zum Abschluß gebracht. Es handelt sich jetzt noch um die Frage, ob die Lagrange-Funktion (50) auch für die r_{ik} die richtigen Bewegungsgleichungen liefert und ob damit (33) erfüllt ist. Dazu müssen wir die noch unbekannten Bewegungsgleichungen der r_{ik} zunächst berechnen, d. h. die \dot{r}_{ik} so bestimmen, daß die Bewegungsgleichungen (3) der s_{ik} erfüllt sind.

4. Die Bewegungsgleichungen der r_{ik} . Zur Auffindung der \dot{r}_{ik} machen wir, weil es ja nicht möglich ist, die Gleichung (39) nach den r_{ik} aufzulösen, einen in den r_{ik} linearen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\frac{d r_{ik}}{d \tau} = \alpha r_{ik} + \beta r_{ik}^* + \gamma (u_i r_{kl} u_l - u_k r_{il} u_l) + \delta (u_i r_{kl}^* u_l - u_k r_{il}^* u_l). \quad (51)$$

Es folgt daraus für die Invarianten (42):

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= 2\alpha A - 2i\beta B - \gamma y + i\delta Bx, \\ \dot{B} &= 2\alpha B + 2i\beta A - \gamma Bx + i\delta(y - 2Ax). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Für die Größen (43) gilt

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 2(\alpha y - i\beta Bx - \gamma yx + i\delta Bx^2) - 2\frac{e}{mc}pz^2. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Das Erste folgt allgemein aus (2), das Letzte mit Benutzung dieser Formel für u_i und Einführung von $s_{ik}u_k$ gemäß (44).

Wir verlangen zunächst die Erfüllung von (33), d. h. wegen $W_1 = pz$ — vgl. (44), zweite Formel, und (49) —:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{e}{mc}pz. \quad (54)$$

Differentiation von (48) liefert mit Benutzung von (52) und (53) nach einiger Rechnung

$$\dot{\vartheta} = \left\{ \frac{\gamma A - i\delta B}{A^2 + B^2} - 2\frac{ep}{mc} \right\} z + \dot{\vartheta}_0. \quad (55)$$

Die Glieder mit α und β *verschwinden* bei der Bildung von $\dot{\vartheta}$. Durch Vergleich von (54) und (55) finden wir, da ϑ_0 nur noch von A und B , aber nicht mehr von x und y , daher auch nicht von z abhängen kann,

$$\vartheta_0 = 0, \quad \dot{\vartheta}_0 = \text{const.} \quad (56)$$

und als *erste Bedingung* für die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p$:

$$p = \frac{mc}{e} \frac{\gamma A - i\delta B}{A^2 + B^2}. \quad (57)$$

Hierdurch ist, mit Rücksicht auf (32), die Bewegungsgleichung (2) der u_i befriedigt. Zweitens müssen wir das Erfülltsein der Gleichung (3) für die s_{ik} verlangen. Wir differenzieren dazu (39), substituieren (51) für \dot{r}_{ik} , (2) mit Verwendung von (44) für \dot{u}_i und setzen das Ganze gleich s_{ik}/ε . Es ergibt sich nach einer etwas längeren Rechnung, bei der wieder Mehrfachprodukte der r_{ik} nach den Formeln (21) und (22) reduziert und auf A, B umgerechnet werden müssen, als *zweite Bedingung*

$$\dot{p} - \frac{p}{\varepsilon} + (2\alpha - \gamma x)p + 2\frac{e}{mc}(Ax - y)p^2 = 0. \quad (58)$$

Die erste Bedingung entsprach der Bewegungsgleichung (2), die zweite der Gleichung (3); von den Nebenbedingungen sind wir überhaupt ausgegangen. Es ist also allen Bewegungsgleichungen Genüge getan, wenn nur zwischen den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und p die Beziehung (57) und die Riccatische Differentialgleichung (58) bestehen. β bleibt dabei überhaupt willkürlich; p kann irgendein Integral von (58) sein, da es nicht auf die Erfüllung von Anfangsbedingungen, sondern von Differentialgleichungen ankommt. Es genügte unter Umständen schon, wenn p diese Gleichung integrierte für Beschleunigungen, die klein gegen b_0 in (7) sind, weil für höhere eine Abänderung von ε in Frage käme. Wir haben nirgendwo Gebrauch davon gemacht, daß ε eine Konstante wäre. Es besteht also noch viel Freiheit, auch die Bewegungsgleichung (51) der r_{ik} an die Lagrange-Funktion (50) anzuschließen.

Dies ist nicht so zu verstehen, als ob man (51) als Euler-Lagrangesche Gleichung zu (50) auffassen müßte¹⁾. Die Variationsgleichung und als ihre Folge die kanonischen Gleichungen in der Hamiltonschen Form gelten in der Quantenmechanik nur dann, wenn zwischen den konjugierten Variablen, sagen wir ξ_k, η_k , die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen bestehen:

$$\eta_i \xi_k - \xi_k \eta_i = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}. \quad (59)$$

Hiermit folgt aus der Definition (!) der zeitlichen Ableitung

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{i}{\hbar} (H \xi_k - \xi_k H), \\ \dot{\eta}_k &= \frac{i}{\hbar} (H \eta_k - \eta_k H) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

(H = Hamiltonsche Funktion) allerdings

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\partial H}{\partial \eta_k}, \\ \dot{\eta}_k &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Wir werden insbesondere für die Koordinaten x_i und Impulse p_i Vertauschungsrelationen der Form (59) ansetzen und haben deshalb auch eine

¹⁾ Der Versuch wäre nicht ganz absurd, obwohl sie erster Ordnung ist. Wegen des linearen Ansatzes (51) kann man nämlich die $\alpha \dots \delta$ so bestimmen, daß $\dot{r}_{ik} = \partial L / \partial r_{ik}$ wird. Benutzt man dies, um r_{ik} und damit L als Funktion von \dot{r}_{ik} darzustellen, so gilt wegen der Homogenität von L : $r_{ik} = -\partial L / \partial \dot{r}_{ik}$ und folglich $d(\partial L / \partial \dot{r}_{ik}) / d\tau + \partial L / \partial r_{ik} = 0$, was sich von einer Euler-Lagrangeschen Gleichung nur in einem Vorzeichen unterscheidet.

Lagrangesche Funktion dafür aufgesucht. Aber für die r_{ik} können Vertauschungsrelationen der Form (59) aus Tensortransformationsgründen nicht in allen Koordinatensystemen gelten; daher werden auch die kanonischen Gleichungen nicht die Form (61) haben, und es ist ganz unangebracht, bei der Kanonisierung der r_{ik} von der Lagrange-Funktion auszugehen. Der naturgemäße Weg ist offenbar der, die Schlußweise jetzt umzukehren und zunächst die Vertauschungsrelationen der r_{ik} aufzustellen, sodann durch (60) ihre zeitlichen Ableitungen einzuführen und schließlich durch den Vergleich mit (51) die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen. Das Verfahren darf als schlüssig, d. h. die r_{ik} dürfen als kanonisch betrachtet werden, wenn damit im klassischen Grenzfall $\hbar = 0$ die beiden Bedingungsgleichungen (57) und (58) erfüllt sind.

Die Hamiltonsche Funktion muß so bestimmt werden, daß für die p_k, x_k auf Grund ihrer Vertauschungsrelationen die kanonischen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form gelten, d. h. sie ist in der gewöhnlichen Weise durch eine Legendresche Transformation zu gewinnen, bei der nur die x_k, \dot{x}_k berücksichtigt werden. Da die hier aufgestellten kanonischen Gleichungen sich auf den Bewegungsablauf in der *Eigenzeit* beziehen, stellt jedoch H eine Invariante, nicht die Energie dar, und ist unter den in (60) durch einen Punkt angedeuteten Differentiationen die Ableitung nach der Eigenzeit zu verstehen. Diese in die Bewegungsgleichungen eingehende Eigenzeit ist die der Veränderung der Lagenkoordinaten x_i nach (1) entsprechende Zeit τ , nicht die Zeit T des Schwerpunktsystems.

Die Hamiltonsche Funktion ist also gegeben durch

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k - L. \quad (62)$$

L ist zufolge (49) und (50) homogen vom ersten Grade in x und y und demnach zufolge (43) homogen vom zweiten Grade in den u_k , d. h. den \dot{x}_k . Nach dem Eulerschen Satze für homogene Funktionen ist also einfach

$$H = L. \quad (63)$$

5. *Vertauschungsrelationen.* Die Vertauschungsrelationen (VR.) sind das einzige neue Element, das wir der bisher rein klassischen Theorie hinzufügen. Für die p_k, x_k nehmen wir, wie schon begründet wurde, die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} p_i x_k - x_k p_i &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}, \\ p_i p_k - p_k p_i &= x_i x_k - x_k x_i = 0, \\ i, k &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

an, im Einklang mit der Operatorenzuordnung in allen relativistischen Theorien. Die Ausdehnung auf die vierte Koordinate führt bekanntlich zu formalen Widersprüchen, sobald die Energie diskrete Werte hat. Das ist aber in unserem Problem nicht der Fall; wir können uns daher in diesem für das Folgende unwichtigen Punkte mit dieser Formulierung begnügen.

Wesentlich neu aufzustellen sind die VR. der r_{ik} . Sie müssen jedenfalls der Forderung der Lorentz-Invarianz genügen. Für das in Abschnitt 1 eingeführte Schwerpunktssystem mit $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ reduziert sich diese auf Invarianz gegen reelle Drehungen. Wir wollen nun dem antisymmetrischen Tensor zwei Vektoren

$$(r_{23}, r_{31}, r_{12}) = \mathbf{f}, \quad (r_{41}, r_{42}, r_{43}) = i\mathbf{g} \quad (65)$$

zuordnen und verlangen, daß zwischen ihnen *im Schwerpunktssystem die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen* gelten sollen:

$$\left. \begin{aligned} f_i g_k - g_k f_i &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}, \\ f_i f_k - f_k f_i &= g_i g_k - g_k g_i = 0, \\ i, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Die Dimension von \mathbf{f} und \mathbf{g} ist dabei willkürlich gleich der von $\sqrt{\hbar}$ gesetzt worden. Diese Freiheit haben wir, weil für den Anschluß an die dimensionierte Größe s_{ik} in (39) noch der Parameter p zur Verfügung steht. Man könnte auch \hbar durch die Einheit ersetzen, doch sehen wir davon ab, weil zur Verifikation der klassischen Gleichungen noch ein Grenzübergang nach $\hbar = 0$ zu vollziehen ist.

Bewegt sich ein System gleichförmig mit der Geschwindigkeit \mathfrak{B} gegen das Schwerpunktssystem, so findet man durch eine Lorentztransformation für die auf dieses System bezogenen \mathbf{f}, \mathbf{g} :

$$\left. \begin{aligned} f_1 g_1 - g_1 f_1 &= \frac{\hbar}{i} \left(1 + 2 \frac{V_2^2 + V_3^2}{c^2 - V^2} \right) \\ &\quad \text{usw.,} \\ f_1 g_2 - g_2 f_1 &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2 V_1 V_2}{c^2 - V^2} = f_2 g_1 - g_1 f_2 \\ &\quad \text{usw.,} \\ f_1 f_2 - f_2 f_1 &= -\frac{\hbar}{i} \frac{2 c V_3}{c^2 - V^2} = g_1 g_2 - g_2 g_1 \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Die durch „usw.“ angedeuteten Formeln sind durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 zu finden. Wir können nun auch unter \mathfrak{B} die auf das

beliebig (gleichförmig) bewegte System bezogene *Schwerpunktsgeschwindigkeit* verstehen und alle Größen rechterhand durch $U_1 \dots U_4$ ausdrücken. Die VR. enthalten dann nur noch auf dieses beliebig bewegte System bezügliche Größen und sind damit invariant. Sie lassen sich in Tensorform zusammenfassen unter:

$$r_{\mu\nu}^* r_{\varrho\sigma} - r_{\varrho\sigma} r_{\mu\nu}^* = \hbar \{ \delta_{\mu\varrho} \delta_{\nu\sigma} + 2 \delta_{\mu\varrho} U_\nu U_\sigma + 2 \delta_{\nu\sigma} U_\mu U_\varrho - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\varrho} - 2 \delta_{\mu\sigma} U_\nu U_\varrho - 2 \delta_{\nu\varrho} U_\mu U_\sigma \}, \quad (68)$$

wo $r_{\mu\nu}^*$ wieder den zu $r_{\mu\nu}$ dualen Tensor bedeutet. Man erhält nämlich, wenn alle vier Indizes $\mu\nu\varrho\sigma$ verschieden sind, rechts und links Null; dasselbe tritt ein, wenn $\mu = \nu$ oder $\varrho = \sigma$ ist. Stimmen zwei Indizes sonst überein, so ergeben sich die zweiten und dritten Formeln (67) (mit $-\mathfrak{B}$ statt \mathfrak{B}), und wenn auch die beiden andern übereinstimmen, die ersten drei. Mit den x_k und p_k bzw. U_k sollen die $r_{\mu\nu}$ als unabhängige Variable dritter Art unbeschränkt vertauschbar sein. Dagegen sind sie mit den u_k nicht vertauschbar, weil diese die $r_{\mu\nu}$ enthalten. Die Regeln (21) und (22) bleiben bei diesen VR. bestehen.

6. Die Hamiltonsche Funktion und Vertauschungsrelationen der Invarianten. Um mit den so gewonnenen VR. in der am Schlusse von Abschnitt 4 ausgeführten Weise die Bewegungsgleichungen der r_{ik} zu vervollständigen, müssen wir zunächst in H die Geschwindigkeiten durch die Impulse ausdrücken. Die Durchführung dieser und der folgenden Rechnungen würde sehr umständlich werden, wollte man den Wert von ϑ_0 in (50) ganz beliebig lassen. Wir wollen uns daher beschränken, den Fall

$$\vartheta_0 = 0 \quad (69)$$

durchzurechnen. Es scheint uns übrigens, daß man in der Wahl dieser Konstanten wirklich vollkommene Freiheit hat, d. h. daß die physikalischen Ergebnisse von ihrem Werte unabhängig sind; denn es handelte sich bei der Einführung von ϑ durch (33) nur um die Erfüllung der Gleichung (2) als Differentialgleichung ohne Rücksicht auf Anfangsbedingungen. Diese sind in unserem kräftefreien Falle durch die Konstanz der U_i erfüllt, und bei Einführung äußerer Kräfte kann man die U_i variieren und ihre Anfangswerte als Integrationskonstanten einführen.

Die Lagrange-Funktion (50) wird nun einfach

$$L = \frac{mc^2}{2} \frac{y - Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (70)$$

mit der Bedeutung (42) und (43) der Invarianten. Nach (35) berechnet man daraus

$$U_i = - \frac{A u_i + r_{iu} r_{uv} u_v}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (71)$$

Die Umkehrung [man braucht nur mit dem Ansatz $u_i = a U_i + b r_{iu} r_{uv} U_v$ in (71) einzugehen und nach den Regeln (21), (22) zu reduzieren] liefert

$$u_i = - \frac{A U_i + r_{iu} r_{uv} U_v}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (72)$$

Setzen wir entsprechend (43)

$$\begin{aligned} U_i^2 &= X, \\ r_{io} r_{i\tau} U_o U_\tau &= Y, \end{aligned} \quad (73)$$

so gilt

$$X = x, \quad Y = y. \quad (74)$$

Daher gilt schließlich auch, mit Hinblick auf (63),

$$H = \frac{mc^2}{2} \frac{Y - AX}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (75)$$

Die Hamiltonsche Funktion lautet also in den Impulsen bzw. in den U_i genau wie die Lagrangesche Funktion in den Geschwindigkeiten; das gilt nicht, wie (63), für jedes quadratische L .

In diesem Ausdrucke sollen nun die Veränderlichen den VR. (64) und (68) unterworfen werden. Dazu ist zunächst für Symmetrisierung zu sorgen. Die in den $r_{\mu\nu}$ bilinearen Invarianten Y , A und B sind bereits durch die Tensorschreibweise symmetrisch, weil neben jeder Indexkombination auch die inverse vorkommt. [Auf die Stellung der U_i kommt es nicht an. In (72) z. B. ist aber $\frac{1}{2} (r_{iu} r_{uv} + r_{uv} r_{iu}) U_v$ statt $r_{iu} r_{uv} U_v$ zu lesen.] Wir untersuchen die Vertauschbarkeit dieser Größen untereinander und beginnen dazu mit den VR. der $r_{\mu\nu}$ und der Invarianten. Für ihre Definition vgl. (42) und (73). Man findet für A und Y leicht, für B unter Berücksichtigung der Identität $(r_{\varrho o}^* r_{\mu\nu}^* - r_{\mu\nu}^* r_{\varrho o}^*) r_{\varrho o} = (r_{\varrho o}^* r_{\mu\nu}^* - r_{\mu\nu}^* r_{\varrho o}^*) r_{\varrho o}^*$:

$$\left. \begin{aligned} r_{uv}^* A - A r_{uv}^* &= \hbar \{ r_{uv} - 2 (U_u r_{vo} U_o - U_v r_{uo} U_o) \}, \\ r_{uv}^* B - B r_{uv}^* &= i\hbar \{ r_{uv}^* - 2 (U_u r_{vo}^* U_o - U_v r_{uo}^* U_o) \}, \\ r_{uv}^* Y - Y r_{uv}^* &= -2\hbar (2X + 1) (U_u r_{vo} U_o - U_v r_{uo} U_o). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Die hierzu dualen Formeln findet man unter den Ergänzungen des Abschnittes 12. $X = U_i^2$ hat der Bedeutung von U_i als Vierergeschwindigkeit entsprechend den Wert -1 . In den folgenden Formeln ist dieser Wert immer gleich eingesetzt, da nicht mehr nach U_i differenziert wird.

Hiernach können wir die VR. der Invarianten untereinander bilden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} B Y - Y B &= \frac{i}{4} \{ r_{\mu\nu}^* (r_{\mu\nu} Y - Y r_{\mu\nu}) + (r_{\mu\nu}^* Y - Y r_{\mu\nu}^*) r_{\mu\nu} \} \\ &= -2i\hbar Y. \end{aligned} \quad (77)$$

Die Übrigen nehmen eine sehr symmetrische Form an, wenn man noch

$$C = Y - A X = Y + A \quad (78)$$

eingührt. Sie lauten dann

$$\left. \begin{aligned} A B - B A &= -2i\hbar C, \\ B C - C B &= 2i\hbar A, \\ C A - A C &= 2i\hbar B. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Diese Relationen werden uns in ihrem Zusammenhange mit denen der Diracschen Matrizen noch beschäftigen. Aus den beiden letzten ist, ganz ähnlich wie bei Drehimpulskomponenten, zu schließen, daß

$$C \text{ und } A^2 + B^2 \text{ vertauschbar} \quad (80)$$

sind. Die Größe C , Formel (78), ist der Zähler von H , Formel (75), immer unter der Voraussetzung, daß $U_k^2 = X = -1$ gesetzt werden kann, also H nicht gerade als Funktion der U_k betrachtet werden soll. Aus (80) folgt nicht unbedingt, daß C auch mit $(A^2 + B^2)^{1/2}$ und $(A^2 + B^2)^{-1/2}$ vertauschbar wäre (es käme z. B. auch Antikommutativität in Frage); wir kommen aber nicht auf Widersprüche, wenn wir diese Annahme machen und ohne weitere Symmetrisierung

$$H = \frac{m c^2}{2} \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (81)$$

setzen.

Der physikalischen Bedeutung nach ist unser H nicht, wie in der Theorie ohne Strahlungskraft, die Ruhenergie. (Man ergänzt dort gewöhnlich $m c^2/2$, so daß $H = 0$ wird. Die Konstanz von H bedeutet jedenfalls die Konstanz der Ruhenergie.) Wir hatten ursprünglich mit der Konstanz der Ruhenergie das Vorhandensein einer Hamiltonschen Funktion wahrscheinlich gemacht. Durch das Auftreten zweier Geschwindigkeiten ist der Sachverhalt etwas anders geworden: weder ist $H = \frac{m c^2}{2} u_i^2$, noch $\frac{m c^2}{2} U_i^2$, sondern, nach dem Eulerschen Satze für quadratische Funktionen, angewandt auf L , wegen $H = L$:

$$H = \frac{1}{2} u_i \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{m c^2}{2} u_i U_i; \quad (82)$$

das ist z. B. im Schwerpunktsystem, $U_1 \dots U_3 = 0$, $U_4 = i$, $H = \frac{mc^2}{2} i u_4$, die halbe, negative Gesamtenergie. Übrigens würde H in den beiden anderen Formen, wegen $U_i^2 = u_i^2 = -1$, garkein Eigenwertproblem definieren und die Bildung der zeitlichen Ableitung nach (60) sinnlos sein.

7. Die Bewegungsgleichungen der r_{ik} , Fortsetzung. Nach diesen Vorbereitungen können wir die Berechnung der \dot{r}_{ik} zu Ende führen. Nach dem in Abschnitt 4 Gesagten sollten sie gegeben sein durch

$$\frac{d r_{ik}}{d \tau} = \frac{i}{\hbar} (H r_{ik} - r_{ik} H). \quad (83)$$

Man benötigt zur Berechnung dieses Ausdruckes noch die VR. von r_{uv} und $(A^2 + B^2)^{-1/2}$, was eigentlich eine besondere Definition erforderte, etwa die Extrapolation der VR. von r_{uv} mit einer ganzen, positiven Potenz von $A^2 + B^2$ auf die Potenz $-1/2$. Aber wir brauchen hier nur die klassische Näherung zu berechnen, weil es sich ja um eine Koeffizientenbestimmung in der klassischen Gleichung (51) handeln soll, und können einfach so schließen: Im Schwerpunktsystem haben die VR. die Heisenbergsche Form, daher gilt dort

$$\left. \begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{f}}, \\ \dot{\mathfrak{f}} &= -\frac{\partial H}{\partial g}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Hier ist eigentlich quantenmechanische Differentiation gemeint. Aber in klassischer Näherung geht diese in gewöhnliche Differentiation über, und wir haben

$$\dot{g} = \frac{mc^2}{2} \{ (A^2 + B^2)^{-1/2} \partial C / \partial \mathfrak{f} - \frac{C}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} \partial (A^2 + B^2) / \partial \mathfrak{f} \} \quad (85)$$

usw. Kehren wir nun bei der Bildung der Ableitungen zur Form der VR. zurück:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{f}} &= \frac{i}{\hbar} (C g - g C) = \frac{i}{\hbar} [C g], \\ -\frac{\partial C}{\partial g} &= \frac{i}{\hbar} (C \mathfrak{f} - \mathfrak{f} C) = \frac{i}{\hbar} [C \mathfrak{f}], \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

so können wir leicht \dot{r}_{ik} für ein beliebiges Bezugssystem angeben:

$$\dot{r}_{ik} = \frac{i}{\hbar} \frac{mc^2}{2} \left\{ (A^2 + B^2)^{-1/2} [C r_{ik}] - \frac{C}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} [A^2 + B^2, r_{ik}] \right\}, \quad (87)$$

wobei wir nach Ausführung der Klammeroperationen auf die Faktorenfolge nicht mehr zu achten brauchen. Mit den Formeln (76) bzw. ihren Ergänzungen ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ik} = & \frac{mc^2}{2} \{ -i(A^2 + B^2)^{-1/2} r_{ik}^* \\ & + BC(A^2 + B^2)^{-3/2} (r_{ik} - 2(U_i r_{k\sigma} U_\sigma - U_k r_{i\sigma} U_\sigma)) \\ & - iAC(A^2 + B^2)^{-3/2} (r_{ik}^* - 2(U_i r_{k\sigma}^* U_\sigma - U_k r_{i\sigma}^* U_\sigma)) \}. \end{aligned} \quad (88)$$

Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung in kanonischen Variablen.

Um den Vergleich mit (51) vorzunehmen, muß man noch die U_i durch die u_i ausdrücken. Beim Einsetzen von (71) behält man nach der Reduktion noch Glieder mit $r_{i\sigma} u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$ und $r_{i\sigma}^* u_\sigma r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$, die sich aber nach Formel (152) der „Ergänzungen“ weiter vereinfachen lassen. Nach einer längeren Rechnung wird

$$\left. \begin{aligned} U_i r_{k\sigma} U_\sigma - U_k r_{i\sigma} U_\sigma &= - (u_i r_{k\sigma} u_\sigma - u_k r_{i\sigma} u_\sigma) \\ &+ \frac{(A^2 + B^2 - AC) r_{ik} - iBC r_{ik}^*}{A^2 + B^2}, \\ U_i r_{k\sigma}^* U_\sigma - U_k r_{i\sigma}^* U_\sigma &= - (u_i r_{k\sigma}^* u_\sigma - u_k r_{i\sigma}^* u_\sigma) \\ &+ \frac{iBC r_{ik} + (A^2 + B^2 + AC) r_{ik}^*}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Durch Eintragen dieser beiden Terme in (88) wird schließlich

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ik} = & \frac{mc^2}{2} (A^2 + B^2)^{-3/2} \{ -BC r_{ik} + i(C^2 - A^2 - B^2 + CY) r_{ik}^* \\ & + 2BC(u_i r_{k\sigma} u_\sigma - u_k r_{i\sigma} u_\sigma) - 2iAC(u_i r_{k\sigma}^* u_\sigma - u_k r_{i\sigma}^* u_\sigma) \}. \end{aligned} \quad (90)$$

Diese Formel bestimmt die Koeffizienten $\alpha \dots \delta$ in (51). Es genügt, festzustellen, daß

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{mc^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} BC, \\ \delta &= \frac{-imc^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} AC, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

ist. Dies ergibt in (57)

$$p = 0, \quad (92)$$

und damit ist auch (58) erfüllt. *Unsere Hamiltonsche Funktion ist danach mit allen klassischen Bewegungsgleichungen im Einklang.*

Allerdings erhält man an Stelle der letzten, Gleichung (3), zufolge von (39) mit $p = 0$ lediglich ihre triviale Lösung: $s_{ik} = 0$. Aber gerade das ist sehr befriedigend; denn aus (2) folgt nun

$$\frac{du_i}{d\tau} = 0 \quad (93)$$

und damit beschleunigungsfreie Bewegung, wie man es in der Abwesenheit äußerer Kräfte erwarten muß. Die schwer zu deutenden, übrigens bei konstantem ε unendlich werdenden, nichttrivialen Lösungen, die (3) in diesem Falle außerdem noch hat, werden hiermit in der klassischen Näherung erwünschterweise von selber ausgeschlossen, und zwar *ohne daß den r_{ik} irgendwelche trivialen oder überhaupt partikulären Werte auferlegt werden*. Die Variablen dritter Art behalten vielmehr ihre selbständigen, nur von den universellen Konstanten abhängigen Bewegungsgleichungen, in klassischer Näherung eben die Gleichungen (88). Dieser Sachverhalt erscheint uns, wie schon am Schlusse der Einleitung angedeutet wurde, besonders wichtig im Hinblick auf den Spin, dessen Auftreten wir nun erörtern wollen. Das Zustandekommen der richtigen Spinmechanik möge die vorläufig etwas kühne Hoffnung rechtfertigen, daß die r_{ik} die richtigen Variablen sind, um bei nichtverschwindenden F_{ik} auch die Gleichung (3) selbst zu gewinnen.

8. *Zusammenhang mit den Diracschen Variablen.* Die Diracsche Gleichung schreibt sich bekanntlich für freie Elektronen

$$\alpha \mathbf{p} + \alpha_4 p_4 + \varrho_3 mc = 0 \quad (94)$$

oder mit (19), wenn man $(U_1, U_2, U_3) = \mathfrak{U}$ setzt

$$\alpha \mathfrak{U} + \alpha_4 U_4 + \varrho_3 = 0. \quad (95)$$

Dabei ist α die auf c bezogene, gewöhnliche Geschwindigkeit:

$$\alpha = \frac{v}{c} \quad (96)$$

und

$$\alpha_4 = i. \quad (97)$$

Die VR. der α untereinander und mit ϱ_3 werden gewöhnlich

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2 \delta_{ik}, \\ \alpha_i \varrho_3 + \varrho_3 \alpha_i &= 0, \quad \varrho_3^2 = 1, \\ i, k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

geschrieben. Man kann aber auch die α , wie schon Dirac es ursprünglich getan hat¹⁾, in der Form

$$\alpha = \varrho_1 \sigma \quad (99)$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik, § 74; Leipzig 1930.

eingeführen. Die $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und ϱ_1, ϱ_3 zusammen mit einem sechsten Operator ϱ_2 bilden dann eine *Darstellung vierten Grades der Lorentz-Transformation*. Die VR. für eine beliebige Darstellung lauten¹⁾

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2 i \sigma_3, \quad \text{usw.} \quad (100)$$

$$\varrho_1 \varrho_2 - \varrho_2 \varrho_1 = 2 i \varrho_3, \quad \text{usw.} \quad (101)$$

Jedes σ ist mit jedem ϱ vertauschbar. Man findet die hieraus folgenden Matrizen allgemein ausgerechnet bei van der Waerden. Unter ihnen sind die vierzeiligen dadurch ausgezeichnet, daß die σ unter sich und die ϱ unter sich antikommutativ und die Quadrate aller sechs Größen gleich der Einheitsmatrix sind. Dies führt dazu, daß sie in der Verbindung (99) die Diracschen VR. erfüllen, und zwar kann man zeigen²⁾, daß sie bis auf Ähnlichkeitstransformationen ($\varrho' = S^{-1} \varrho S$, mit unitärem S) und triviale Erweiterungen die einzigen dieser Eigenschaft sind. Es lassen sich aus ihnen zwei Invarianten, zwei Vierervektoren und ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe bilden, nämlich³⁾ die Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 (d. h. $\psi^* \varrho_2 \psi$ ist invariant; Entsprechendes gilt für das Übrige), die Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, i \cdot 1$ und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, i \varrho_1$ und der antisymmetrische Tensor $\alpha_i \varrho_3 \alpha_k$ mit $i, k = 1, 2, 3$.

Wir wollen nun in zunächst mehr orientierender Weise die Verhältnisse im *Schwerpunktssystem* betrachten und zeigen, daß ein Teil unserer Variablen dritter Art bzw. der daraus zusammengesetzten Größen ohne weiteres den Diracschen Variablen zugeordnet werden kann, und daß dabei physikalische Größen gleicher Bedeutung einander zugeordnet werden. Um auf geläufige Beziehungen zu kommen, gehen wir nach (65) zu Raumvektoren über. Es ist dann allgemein

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (f^2 - g^2), \\ B &= \frac{1}{2} (g\mathbf{f} + \mathbf{f}g). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Im Schwerpunktssystem wird ferner [vgl. (73)]

$$Y = g^2, \quad (103)$$

daher [nach (78)]

$$C = Y + A = \frac{1}{2} (f^2 + g^2) \quad (104)$$

¹⁾ B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, § 20, Berlin 1932. Man setze dort $A_p + A_q = \sigma_1$, $A_p - A_q = i \sigma_2$, $2 A_z = \sigma_3$ und $B_p + B_q = \varrho_1$ usw. — ²⁾ W. Pauli, Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. XXIV/1, Kap. 2/B, Ziff. 2. Berlin 1933. — ³⁾ J. v. Neumann, ZS. f. Phys. 48, 868, 1928. Vgl. auch die Arbeit des Verfassers ebenda 96. 520, 1935.

und, wenn wir kurz $(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}$ setzen, nach (72):

$$\mathbf{u} = -\frac{[\mathbf{g}\mathbf{f}]}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad u_4 = -i\frac{\frac{1}{2}(f^2 + g^2)}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (105)$$

Wir betrachten nun die Größen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{s} &= [\mathbf{g}\mathbf{f}] \\ s_4 &= \frac{i}{2}(f^2 + g^2). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Die \mathbf{f}, \mathbf{g} verhalten sich im Schwerpunktsystem gemäß (66) wie Impuls- und Ortsvektor, also \mathfrak{s} wie ein Drehimpuls; es gilt also

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = i\hbar s_3, \quad \text{usw.}, \quad (107)$$

und ebenso, wie der Drehimpuls mit drehinvarianten Größen vertauschbar ist, ist \mathfrak{s} vertauschbar mit A, B, C und s_4 . Wir wollen auch — nicht ganz ohne Willkür, wie bei (81) — Vertauschbarkeit mit $\sqrt{A^2 + B^2}$ annehmen. Die Gleichungen (107) entsprechen, da es sich um Vektorkomponenten handelt, den Gleichungen (100), und zwar gehen sie in diese über, wenn man

$$\mathfrak{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (108)$$

setzt. Nun bilden, wie bemerkt, $\boldsymbol{\sigma}$ und $i\varrho_1$ einen Vierervektor; das gleiche tun \mathfrak{s} und s_4 , da sie im Schwerpunktsystem aus $-\sqrt{A^2 + B^2}u_i$ hervorgehen; und da $f^2 + g^2$ mit $[\mathbf{g}\mathbf{f}]$ ebenso kommutiert, wie ϱ_1 mit $\boldsymbol{\sigma}$, kann man \mathfrak{s}, s_4 vollständig durch Diracsche Operatoren darstellen in der Form

$$\mathfrak{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad s_4 = \frac{\hbar}{2} i\varrho_1. \quad (109)$$

Aus dieser Gleichsetzung folgt die Übereinstimmung unserer Theorie mit der Diracschen in einer wichtigen Gleichung. Es ergibt sich nämlich, indem die mit allen übrigen — auch mit s_4 , wegen $s_4 = iC$ — vertauschbaren $\sqrt{A^2 + B^2}$ sich heben,

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{i\mathbf{u}}{u_4} = \frac{i\mathfrak{s}}{s_4} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\varrho_1}. \quad (110)$$

In Diracs Theorie war laut (96) und (99)

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \boldsymbol{\alpha} = \varrho_1 \boldsymbol{\sigma}, \quad (111)$$

und das ist genau dasselbe, denn ϱ_1 hat, wie alle Diracschen Matrizen, das Quadrat 1, folglich ist $\varrho_1 = \varrho_1^{-1}$, und die reziproke Schreibweise ist offenbar die sinnvolle. Während in (109) nur zwei Darstellungen auf-

einander bezogen wurden, wobei ihre Elemente noch ganz verschiedene Bedeutung haben konnten, hat man es hier wirklich mit der gleichen physikalischen Größe zu tun.

Diese Zuordnung ist trotzdem nur orientierend insofern, als sie sich bei den ξ nur auf die allgemeinen, den VR. (100) entsprechenden Relationen (107) stützt, während die σ den schärferen VR. Diracs unterliegen. Wir werden die Verhältnisse sogleich genauer untersuchen und finden, daß in der Tat die halbzahlige Quantelung allgemein und ihre den schärferen Relationen genügende, niedrigste Stufe im besonderen durch einfache Nebenbedingungen ausgezeichnet sind. Wenn einer dieser Fälle vorliegt, hat wie bei den gewöhnlichen Drehimpulsen nur das Produkt $[\mathbf{g}\mathbf{f}]$ quantentheoretische Bedeutung, während es für seine Faktoren keine Darstellung gibt.

9. *Darstellungen für A, B und C durch endliche Matrizen.* Unsere Theorie enthält noch die Invarianten A und B. Es liegt nahe, zu erwarten, daß sie sich durch die Diracschen Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 darstellen lassen; denn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ bilden ja zufolge (101) einen sehr ähnlichen Zykel wie A, B, C in (79), und C ist im Schwerpunktssystem gleich $\frac{\hbar}{2} \varrho_1$. Ein solcher Zusammenhang besteht auch; er ist aber nicht so einfach, wie es den Anschein hat, und wir wollen zunächst die VR. (79) systematisch und ohne Hinblick darauf untersuchen. Man findet leicht, daß

$$D^2 = C^2 - (A^2 + B^2) \quad (112)$$

mit A, B und C vertauschbar ist. Zwischen A, B, C und ξ^2 besteht nun eine Identitätsbeziehung. Bei kommutativen Variablen wäre

$$C^2 - (A^2 + B^2) = \frac{1}{4} (f^2 + g^2)^2 - \frac{1}{4} (f^2 - g^2)^2 - (\mathbf{g}\mathbf{f})^2 \equiv [\mathbf{g}\mathbf{f}]^2 = \xi^2, \quad (113)$$

was darauf hinausläuft, daß im Schwerpunktssystem $H = \frac{mc^2}{2} i v_4$ ist.

Wegen der Nichtkommutativität bleiben bei der Differenzbildung noch Glieder mit \hbar^2 stehen, und zwar ergibt sich

$$D^2 = C^2 - (A^2 + B^2) = \xi^2 - \frac{3}{4} \hbar^2. \quad (114)$$

Die Eigenwerte von ξ sind bekanntlich durch (107) vollständig bestimmt, wenn man noch hinzunimmt, daß ξ reell ist. Diese Voraussetzung wollen wir machen; danach ist

$$\xi^2 = S(S+1)\hbar^2, \quad (115)$$

wobei S ganzzahlig oder halbzahlig sein kann. Der kleinste Wert ist $S = \frac{1}{2}$; also ist jedenfalls

$$D^2 \geq 0. \quad (116)$$

Wählt man C diagonal, so ergibt sich aus (79) nach der gewöhnlichen Schlußweise durch Einführung von $A + iB$ und $A - iB$, daß die Eigenwerte von C die Abstände $2\hbar$ haben. Der mangelnden Definitheit in (112) halber braucht es aber bei gegebenem D keinen größten und kleinsten zu geben. Betrachten wir dennoch, um zu einer Übersicht zu kommen, einmal die Darstellungen von A , B und C durch *endliche* Matrizen. Man schließt dann wie üblich aus der Betrachtung von $(A + iB)(A - iB)$ bzw. $(A - iB)(A + iB)$ in C -Darstellung, daß, wenn man

$$D^2 = I(I + 2)\hbar^2 \quad (117)$$

setzt, der niedrigste Eigenwert von C unter $(I + 2)\hbar$ und $-I\hbar$, der höchste unter $I\hbar$ und $-(I + 2)\hbar$ zu suchen ist. Für I folgt aus (114), (115) und (117) die Gleichung

$$I(I + 2) = (S - \frac{1}{2})(S + \frac{3}{2}) \quad (118)$$

mit den Wurzeln $I = S - \frac{1}{2}$ und $I = -S - \frac{3}{2}$. Also sind

$$C = \begin{Bmatrix} (S - \frac{1}{2})\hbar, \\ (-S + \frac{1}{2})\hbar \end{Bmatrix} \quad (119)$$

der höchste und niedrigste Eigenwert. Ein Abstand gleich einem ganzen Vielfachen von $2\hbar$ ergibt sich hieraus nur, wenn S *halbzahlig* ist. Wir haben also die Eigenwerte

S	$C/2\hbar$	S	$C/2\hbar$	S	$C/2\hbar$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1 0 -1
usw.					

(120)

Bei *endlichen* C -Matrizen sind also nur *halbzahlige* S zugelassen. $A/2i$, $B/2i$, $C/2$ und s_1, s_2, s_3 können nach den Formeln (20, 13) bei van der Waerden (mit $J = S$, $J' = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}$, $s_1 = \hbar/2 \cdot \sigma_1 = \hbar/2 \cdot (A_p + A_q)$ usw., $A/2i = \hbar/2 \cdot (B_p + B_q)$ usw.) als hermitesche Matrizen dargestellt werden. Nachdem das für ξ vorausgesetzt wurde, werden also A und B schieferhermitesch oder *reinimaginär*. Die Hamiltonsche Funktion (81) wird damit auch *reinimaginär*. Man hat das wohl so aufzufassen, daß Partikel mit $S = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ usw. *instabil* sind mit Lebensdauern der Größenordnung $\hbar/mc^2 \approx \frac{3}{2} 137 \varepsilon \sim 10^{-20}$ sec. Eine Ausnahme bildet der Fall

$$S = \frac{1}{2} \quad C^2 = A^2 + B^2, \quad (121)$$

vgl. (114). Hierzu gehört nach der Aufstellung (120) $C = 0$; die Hamiltonsche Funktion erscheint hier unter der Form $0/0$. Die Bedingung (121)

ist aber nach einer Operatortransformation auch noch mit endlichem C zu erfüllen und wird uns gerade das Diracsche Elektron liefern. Mit den hypothetischen, kurzlebigen Gebilden wollen wir uns in dieser Arbeit nicht weiter befassen.

Außerdem kann es immer ganzzahlige S mit unendlichen C -Matrizen geben. Für die aus den \mathbf{f}, \mathbf{g} , die den VR. (66) genügen, zusammengesetzten Größen sind ja alle übrigen VR., sowie die Bedingungsgleichung (114) soviel wie *Identitäten*, insofern als sie auf Grund von (66) aufgestellt wurden. Daß die als Vektorprodukte konjugierter \mathbf{f}, \mathbf{g} , die den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen genügen, darstellbaren \mathbf{s} immer ganzzahlige Vielfache von \hbar zu Eigenwerten haben, ist ein wohlbekannter Satz der Quantenmechanik¹⁾. Für die mit dieser Arbeit verfolgten *elektrodynamischen* Ziele wird man wohl die \mathbf{f}, \mathbf{g} selber brauchen und demgemäß ganzzahlige Werte von S zulassen müssen, doch läßt sich darüber beim gegenwärtigen Stande der Betrachtung nichts Genaueres sagen. Die *Existenz* weiterer Zustände, sei es mit ganzen, sei es mit halbganzen S ist jedenfalls aus den am Schlusse von Abschnitt 6 erwähnten Gründen für die Theorie notwendig, weil sie erst das Eigenwertspektrum von H bestimmen.

10. Beliebiges, gleichförmig bewegtes System. Um zu einer Einsicht in die mathematisch etwas verwickelteren Verhältnisse des Falles (121) zu gelangen, müssen wir den Übergang zu einem gegen das Schwerpunktsystem bewegten Systeme genauer erörtern. Für die Hamiltonsche Funktion galt nach (81) und (82)

$$u_i U_i = \frac{2H}{mc^2} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (122)$$

Im Schwerpunktsystem genügten die $\sqrt{A^2 + B^2} u_i$ den besonders einfachen VR. des Drehimpulses. Wir wollen daher auch hier

$$- \sqrt{A^2 + B^2} u_i = s_i \quad (123)$$

einführen und an Stelle von (122) die Gleichung

$$s_i U_i + C = 0 \quad (124)$$

betrachten. Die s_i gehen aus den im Schwerpunktsystem benutzten durch eine Lorentz-Transformation hervor. In Gleichung (20) wurden sie bzw. die u_i ja auf diese Weise erzeugt. Wir können aber auch die VR. der s_i aus (68) berechnen und mit ihrer Hilfe die s_i bestimmen. Der größeren

¹⁾ M. Born u. P. Jordan, Elementare Quantenmechanik, § 32. Berlin 1930.

Deutlichkeit halber und weil die allgemeinen VR. der s_i an und für sich Interesse haben, sei auch dieser Weg angedeutet: man findet

$$\left. \begin{aligned} s_1 s_2 - s_2 s_1 &= \hbar (s_3 U_4 - s_4 U_3), \\ s_1 s_4 - s_4 s_1 &= \hbar (s_2 U_3 - s_3 U_2) \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

usw.

Die Größe

$$\eta = s U + s_4 U_4 \quad (126)$$

ist mit allen s_i vertauschbar. Mit ihrer Hilfe kann man s_4 aus der ersten Hälfte der VR. vertreiben; danach gelingt es durch eine Lineartransformation der s unschwer, die Gleichungen auf die Form (100) zu bringen und damit s auf σ zurückzuführen. Es ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{\hbar}{2} \left\{ \sigma - \frac{U(U\sigma)}{|U|^2} (1 - \sqrt{1+U^2}) \right\} - \eta U, \\ s_4 &= i \frac{\hbar}{2} (U\sigma) - i \eta \sqrt{1+U^2}, \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

und das bedeutet in der Tat eine Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $cU/\sqrt{1+U^2}$, wenn man

$$\eta = \frac{\hbar}{2} i \sigma_4 \quad (128)$$

setzt.

Wie man sieht, kann die Größe η auf zweierlei Weise aufgefaßt werden: nach (128) ist sie die vierte Komponente eines Vierervektors, nach (126) eine Invariante und gemäß (124) gleich $-C$ zu setzen. Diese Eigenschaft hat die vierte Komponente einer Lorentz-Transformation $x'_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$ immer, weil die $i\alpha_{4j}$ gerade die Komponenten der als Vierervektor U_j aufgefaßten Transformationsgeschwindigkeit, bezogen auf das System mit x_j , bilden¹⁾; es ist also $i x'_4 = \sum_j U_j x_j$, wie eben in (128) und (126) zum Ausdruck kommt. Die vierte Komponente eines Vierervektors in einem bestimmten System drückt sich also durch seine Komponenten in bezug auf andere Systeme und die Relativgeschwindigkeit des hervorgehobenen gegen diese nicht nur stets in gleicher Weise aus, sondern noch in der Form einer Invarianten. Dieser für gewöhnlich nicht besonders bemerkenswerte Sachverhalt spielt nachher eine Rolle, wenn wir *Dar-*

¹⁾ Man betrachte ein vollständiges Schema der Lorentz-Transformation, etwa bei E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin 1936.

stellungen der betreffenden Größe aufsuchen; wir erhalten dann mehrere Darstellungen mit verschiedenem Transformationscharakter.

Wir wenden uns nun wieder Gleichung (124) zu. Sie soll natürlich als *Invariante* aufgefaßt werden, d. h. als eine in jedem System gültige Beziehung zwischen den dynamischen Variablen mit ihren Vertauschungsrelationen. Es kommt uns darauf an, zu zeigen, daß sie die Diracsche Gleichung ist, und wir haben dazu bereits die s_i durch die σ_i ausgedrückt. Würden wir die s_i aber in der Form (127) substituieren, so kämen wir nur auf das Schwerpunktsystem ($C = -\eta = -\frac{\hbar}{2} i \sigma_4$) zurück, gemäß (128).

Eine invariante Darstellung im eigentlichen Sinne erhalten wir aber, wenn es gelingt, die Transformation (127) in die Form

$$s_i = \frac{\hbar}{2} \bar{\gamma} \sigma_i \gamma \quad (129)$$

zu setzen (die Bedeutung von $\bar{\gamma}$ s. w. u.) und durch die gleiche Transformation C in sich selbst überzuführen:

$$C = \bar{\gamma} C \gamma. \quad (130)$$

Die vorgelegte Gleichung verändert dadurch zunächst nicht ihren Sinn. Wir führen aber jetzt die Impulse nach (19) ein und wenden die Gleichung auf eine ψ -Funktion (ψ_0) an:

$$\frac{\hbar}{2} \bar{\gamma} \sigma_i p_i \gamma \psi_0 + m c \bar{\gamma} C \gamma \psi_0 = 0. \quad (131)$$

Danach können wir, statt wie bisher die auf das beliebig bewegte System bezüglichen s_i durch die auf das Schwerpunktsystem bezüglichen auszudrücken, umgekehrt die Funktion ψ_0 des Schwerpunktsystems durch die des beliebig bewegten (ψ) ersetzen vermöge

$$\gamma \psi_0 = \psi. \quad (132)$$

Die Gleichung lautet dann, wenn wir noch von links mit $\left(\frac{\hbar}{2} \bar{\gamma}\right)^{-1}$ multiplizieren:

$$\sigma_i p_i \psi + \frac{2 m c}{\hbar} \cdot C \psi = 0. \quad (133)$$

In dieser Form läßt sie sich nun in *jedem* System reproduzieren, denn die σ_i und C sind reine Zahlenmatrizen und enthalten, obwohl sie im Schwerpunktsystem aufgestellt wurden, keine darauf bezüglichen Parameter. — Die Bezugnahme auf die ψ -Funktion geschah hier nur, um den Sinn der Sache besser hervortreten zu lassen, und wir könnten auch das ψ -Symbol

in (133) wieder streichen. Dann kann $\bar{\gamma}$ irgendeine Matrix sein. Einschränkung kann man verlangen, daß eine zu (133) konjugierte Gleichung für eine Funktion ψ^* besteht. Dann ist $\bar{\gamma}$ die γ adjungierte Matrix.

Im allgemeinen und besonders wenn man derartige Zusatzforderungen erhebt, bedarf die Existenz solcher Matrizen eines besonderen Beweises. Wir wollen uns in dieser Arbeit, wie gesagt, auf den Fall $S = \frac{1}{2}$ beschränken und haben dann wohlbekannte Verhältnisse. Die σ -Matrizen sind in diesem Falle die „Paulischen“:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Sie bilden mit

$$\sigma_4 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (135)$$

eine bei eigentlichen Lorentz-Transformationen invariante Wellengleichung. Um auch Spiegelungen des Koordinatensystems zu umfassen¹⁾, müssen sie auf

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = i \varrho_1, \quad \varrho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (136)$$

erweitert werden, wo die Teilmatrizen σ und 1 die zweizeiligen Paulischen Matrizen bzw. die Einheitsmatrix bedeuten. Dies sind die Diracschen σ -Matrizen; sie transformieren sich mit dem von Dirac angegebenen γ , das in diesem Falle hermitesch ist. Setzen wir sie in (133) ein, so können wir nach dem bisher Entwickelten nur $C = 0$ setzen; wir haben dann eine Diracsche Gleichung für eine Partikel mit verschwindender Ruhmasse. Es läßt sich aber zeigen, daß es zu $S = \frac{1}{2}$ auch ein $C \neq 0$ gibt. Dies dürfte die sinnvolle Hebung der auftretenden Unbestimmtheit $H = 0/0$ sein.

II. Diracsche Gleichung mit endlicher Ruhmasse. Der Zustand $S = \frac{1}{2}$ war nach der allgemeinen Bedingungsgleichung (114) gekennzeichnet durch $C^2 = A^2 + B^2$. Die A, B, C unterliegen den VR. (79). Beim Anblick der Bedingungsgleichung ist es naheliegend, eine Hilfsvariable φ einzuführen, derart, daß

$$\left. \begin{aligned} A &= C \cos \varphi, \\ B &= C \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

wird. Schreiben wir nun für C und φ die VR.

$$C e^{i\varphi} = e^{i\varphi} (C + 2\hbar), \quad C e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi} (C - 2\hbar) \quad (138)$$

¹⁾ W. Pauli, a. a. O.; B. L. van der Waerden, a. a. O.

vor, so sind gerade die sämtlichen VR. (79) erfüllt. Wir haben nämlich

$$\left. \begin{aligned} C \cos \varphi - \cos \varphi C &= -\frac{2\hbar}{i} \sin \varphi, \\ C \sin \varphi - \sin \varphi C &= \frac{2\hbar}{i} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

also z. B.

$$\begin{aligned} AB - BA &= C \left(C \cos \varphi + \frac{2\hbar}{i} \sin \varphi \right) \sin \varphi - C \left(C \sin \varphi - \frac{2\hbar}{i} \cos \varphi \right) \cos \varphi \\ &= -2i\hbar C, \end{aligned} \quad (140)$$

und sehr ähnlich erfüllen sich die übrigen Gleichungen (79) sowie auch die Bedingung $C^2 = A^2 + B^2$ selbst. Man kann auch zur Matrizenschreibweise übergehen, denn φ wirkt wie $-2\hbar/i \cdot \partial/\partial C$; daher ist $e^{i\varphi}$, auf eine Funktion von C angewandt,

$$e^{i\varphi} \psi(C) = \psi(C - 2\hbar), \quad (141)$$

und die A, B transformieren die $\psi(C), \psi(C \pm 2\hbar), \dots$ linear untereinander. Die Matrix für C ist diagonal und hat die unendlich vielen Elemente $\dots C' - 4\hbar, C' - 2\hbar, C', C' + 2\hbar, \dots$, wo C' eine c -Zahl ist. Die Eigenwerte des Operators C sind also nur bis auf eine additive Konstante festgelegt.

Wir kommen nun auf unsere Frage von Abschnitt 9 zurück, ob sich nicht die Invarianten A und B durch die Diracschen Invarianten ϱ_2 und ϱ_3 darstellen lassen. Wäre $C = \hbar \varrho_1$ zu setzen, so wären die VR. (79) erfüllt durch $A = i\hbar \varrho_2, B = i\hbar \varrho_3$. Aber dies ergäbe $C^2 = (A^2 + B^2) = 3\hbar^2$ und entspräche $S = \frac{3}{2}$, nicht $S = \frac{1}{2}$; außerdem ist im Schwerpunktssystem $C = s_4/i = \frac{1}{2}\hbar \varrho_1$, nicht $\hbar \varrho_1$. Man kann also nicht die A und B direkt ϱ_2 und ϱ_3 proportional setzen; dagegen ist es auf einfache Weise möglich, sie als *Funktionen* davon aufzufassen, und zwar durch Vermittlung der Hilfsvariablen φ in „Parameterdarstellung“ ohne Einführung von Irrationalitäten. Den Weg dazu weist die Bemerkung, daß

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{2}{\hbar} C, \\ \varrho_2 &= \frac{2i}{\hbar} C \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \varrho_3 &= \frac{2i}{\hbar} C \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

die VR. (101) erfüllen, wenn man (138) auffaßt als Folge von

$$C e^{i\frac{\varphi}{2}} = e^{i\frac{\varphi}{2}} (C + \hbar), \quad C e^{-i\frac{\varphi}{2}} = e^{-i\frac{\varphi}{2}} (C - \hbar). \quad (143)$$

Man erkennt daraus bereits den *Sinn* dieser Zuordnung: Es gibt *zwei* Darstellungen für C , eine durch ϱ_1 , das sich wie eine Vierervektorkomponente transformiert, und eine durch ϱ_2 und ϱ_3 , die sich wie Invarianten verhalten. Dies entspricht genau der Doppelbedeutung, die $\eta (= -C)$ in (126) und (128) hat.

Aber wir haben jetzt eine andere Nebenbedingung. Während zu (79) verlangt war $C^2 = A^2 + B^2$, was für C Null oder eine unendliche Matrix ergab, wird jetzt nicht, wie entsprechend aus (142) folgen würde, $\varrho_1^2 = -(\varrho_2^2 + \varrho_3^2)$ verlangt, sondern gemäß (136) soll $\varrho_1^2 = 1$ sein und folglich C die Eigenwerte $\pm \hbar/2$ haben. Unter dieser Bedingung erhält man aus den VR. (101) nach einer kleinen Rechnung, die wir unter die „Ergänzungen“ im Schlußabschnitt verweisen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{2}{\hbar} C, \\ \varrho_2 &= \frac{2i}{\hbar} C \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right), \\ \varrho_3 &= \frac{2i}{\hbar} C \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right). \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Wir haben also nicht nur verschiedene Darstellungen von C je nach dem Transformationscharakter, sondern auch verschiedene Eigenwerte je nach den Nebenbedingungen. Durch die „Parameterdarstellungen“ (137) und (144) wird eben nur eine funktionale Abhängigkeit der *Operatoren* gestiftet, nicht eine Gemeinschaft der *Eigenwerte*. Die so berechneten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ haben *alle* Eigenschaften der betreffenden Diracschen Operatoren; insbesondere ist auch $\varrho_2^2 = \varrho_3^2 = 1$, $\varrho_1 \varrho_2 = i \varrho_3$ usw.

Hiermit ist also ein einfacher Zusammenhang zwischen den Diracschen ϱ und unseren als konjugiert zu betrachtenden Variablen C und $\varphi/2$ gefunden. Zur Deutung der Gleichungen (144) erinnern wir an die folgenden bekannten Verhältnisse. Wir haben bisher, wenn wir eine Gleichung als Operatorengleichung auffaßten, die σ, ϱ als Zahlenmatrizen und die ψ -Funktion als von den Weltkoordinaten, insbesondere auch von der *Zeit* (t) abhängig gedacht. Man kann aber auch, wie Schrödinger gerade am Beispiel der Diracschen Operatoren besonders klar auseinander-gesetzt hat¹⁾, die ψ -Funktion mit einem Anfangswerte der Zeit festhalten und den *Operator* variieren lassen. Seine Abhängigkeit von der Zeit folgt

¹⁾ E. Schrödinger, Berl. Akad. Ber. (Phys.-math. Kl.) 1930, Nr. 24, S. 418. Vgl. auch H. A. Kramers, Hand- und Jahrb. der chem. Phys., Bd. 1, § 43; Leipzig 1938 und andere moderne Darstellungen der Quantenmechanik.

dann allgemein einer Differentialgleichung der Form (60) mit der Energie als Hamilton-Funktion. In diesem Sinne hat für die kräftefreie Bewegung des Diracschen Elektrons Fock¹⁾ die „Bewegungsgleichungen“ der q und σ aufgestellt und integriert. In dem von uns so genannten *Schwerpunktssystem* [$\varepsilon = 0$ bei Fock; die q_1, q_2, q_3 sind dann die q_a^*, q_b^*, q_c^* , Gleichung (29) a. a. O.] lauten die Lösungen, wenn man noch wie in Abschnitt 2 die auf das Schwerpunktssystem bezügliche Zeit mit T bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_1^0 \cos 2\omega_0 T - q_2^0 \sin 2\omega_0 T, \\ q_2 &= q_1^0 \sin 2\omega_0 T + q_2^0 \cos 2\omega_0 T, \\ q_3 &= q_3^0 \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

mit

$$\omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (146)$$

Die q^0 sind hier zeitunabhängige Matrizen mit der Bedeutung von Anfangswerten, eben die Zahlenmatrizen Diracs. Diese Gleichungen gehen in unsere Formeln (144) über, wenn man

$$\frac{\varphi}{2} = 2\omega_0 T + \text{const.} \quad (147)$$

setzt und die q_1, q_2, q_3 zyklisch permutiert. Eine solche Umstellung kann durch eine unitäre Transformation aufgehoben werden und ist daher unwesentlich. Wir werden so dazu geführt, $\varphi/4\omega_0$ als die *Eigenzeit des Schwerpunktsystems* zu betrachten und die q_1, q_2, q_3 in (144) als die zeitveränderliche Form dieser Operatoren aufzufassen. In (133) ist, wie gesagt, mit φ die zeitabhängige *Eigenfunktion* gemeint; dementsprechend drückt sich C durch die Anfangswerte q^0 der q aus.

Die Gleichungen (144) sind zunächst q -Zahlrelationen. In Matrixform müssen sie offenbar lauten²⁾

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{\hbar} C_v, \\ q_2 &= \frac{2i}{\hbar} C_i \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) - q_3^0 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right), \\ q_3 &= \frac{2i}{\hbar} C_i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) + q_3^0 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right) \end{aligned} \right\} \quad (144')$$

mit φ und δ als c -Zahlen. Wir haben hier unterschieden zwischen C_i , das ist C in seiner Bedeutung als Invariante, und C_v , das ist C als Vierervektor-

¹⁾ V. Fock, ZS. f. Phys. **68**, 522, 1931. — ²⁾ Dieser Übergang bedarf noch der systematischen Begründung.

komponente in der Doppelbedeutung, die $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ in (104) und (106) hat. Ihre Matrixdarstellungen sind also, wenn man etwa $\delta = 0$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} C_v &= \frac{\hbar}{2} \varrho_1^0, \\ C_i &= \frac{\hbar}{2i} \varrho_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Die Matrix ϱ_3^0 ist durch die Vertauschungsrelationen bestimmt. In (133) ist C als Invariante gemeint; wir haben demnach in (148) den Ausdruck mit ϱ_2^0 zu wählen, das ist die Diracsche Zahlenmatrix ϱ_2 . Daß hierfür (130) gilt, liegt in der Natur von ϱ_2 als Invarianten. Die Gleichung (133) nimmt damit die Form

$$\sigma_i p_i \psi - i m c \varrho_2 \psi = 0 \quad (149)$$

an, und daraus entspringt durch Linksmultiplikation mit ϱ_1 , wegen $\varrho_1 \sigma_i = \alpha_i$ [vgl. (99); die Formel gilt auch für $i = 4$], $\varrho_1 \varrho_2 = i \varrho_3$:

$$(\alpha_i p_i + m c \varrho_3) \psi = 0 \quad (150)$$

in genauer Übereinstimmung mit (94). Wir haben damit auch die Diracsche Gleichung mit endlicher Ruhmasse gewonnen. Die Bedeutung von $\frac{\hbar}{2} \sigma$ als zusätzlicher Drehimpuls ergibt sich schließlich daraus, daß — auch ohne äußere Kräfte, mit Bezug auf ein beliebiges Zentrum — nicht $[\mathbf{r} \mathbf{p}]$, sondern $[\mathbf{r} \mathbf{p}] + \frac{\hbar}{2} \sigma$ zeitlich konstant ist.

Hiermit dürfte bewiesen sein, daß der „Spin“ ebenso gut wie die „Bewegung“ in der klassischen Theorie enthalten ist, ohne daß diese eine Ergänzung durch irgendein Elektronenmodell erfährt, und daß elektromagnetische Wechselwirkungen aufs engste damit verbunden sind. Man darf sich danach nicht wundern, wenn man auf Widersprüche stößt bei dem Versuch, elektromagnetische Wellenfelder an eine Hamiltonsche Funktion anzuschließen, die den Elektronenspin schon enthält. Die Einführung der Strahlungsreaktion auf der hier versuchten Grundlage scheint freilich noch ein schwieriges Problem zu sein, nicht nur wegen der mathematischen Schwierigkeiten in der Ausdehnung dieser Behandlungsweise auf den Fall nicht verschwindender Felder, sondern vor allem, weil noch gar nicht feststeht, welche physikalischen Fragestellungen sich damit beantworten lassen. Das rein mechanische Problem dürfte ziemlich klar sein: Es handelt sich um die Auffindung einer Größe, die „diagonal“ bleibt oder wird, wenn man die Strahlungsreaktion eingeschaltet denkt, und die als Hamiltonsche

Funktion die *Veränderlichkeit der Energie* zu berechnen gestattet. In einer solchen Darstellung dürften auch die am Ende von Abschnitt 9 erwähnten ganzzahligen S eine Rolle spielen.

12. Mathematische Ergänzungen. Zu Formeln (21) und (22): Man beweist diese Formeln unschwer durch direktes Ausrechnen, wenn man s_{ik} und s_{ik}^* mit Minkowski¹⁾ als Matrizen s, s^* schreibt und die Bildung z. B. von $s_{ki}^* s_{kj} = - \sum_k s_{ik}^* s_{kj}$ als Matrizenmultiplikation auffaßt. Formel (21) entspricht dann der von Minkowski bemerkten Tatsache, daß $s^* s$ Diagonalmatrix ist und in der Diagonalen lauter gleiche Elemente, nämlich $\frac{1}{2} s_{\mu\nu}^* s_{\nu\mu}$ hat. $s_{ik}^* s_{ki}$ bedeutet nach der Summationsvorschrift Spurbildung und liefert viermal das Diagonalelement. Ganz ähnlich ist $s^2 + s^{*2}$ Diagonalmatrix mit invarianter Spur. — Bei Nichtkommutativität der Matrixelemente ist $s^* s + s s^*$ noch allgemein diagonal; mit den Vertauschungsrelationen (68) auch $s^2 + s^{*2}$.

Zu (76): Die dualen Formeln erhält man entweder, indem man A und Y mit Hilfe von (22) geeignet verwandelt, oder mit Hilfe der Identität

$$(U_\mu r_{\nu o} U_o - U_\nu r_{\mu o} U_o)^* \equiv - (U_\mu r_{\nu o}^* U_o - U_\nu r_{\mu o}^* U_o) - U_\lambda^2 r_{\mu\nu}^*. \quad (151)$$

Zu (89): Es handelt sich bei dieser Umformung um die Vereinfachung des Tensors $r_{io} u_o r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu - r_{ko} u_o r_{i\mu} r_{\mu\nu} u_\nu$ und der entsprechenden Bildung mit r_{io}^*, r_{ko}^* im ersten Faktor. Man mache zunächst die *Annahme*, daß sich diese Tensoren linear durch dieselben vier Tensoren ausdrücken lassen, wie r_{ik} in (51). Verjüngt man dann nacheinander mit allen diesen, so erhält man vier Gleichungen für die vier Koeffizienten, und z. B.

$$\begin{aligned} r_{io}^* u_o r_{k\mu} r_{\mu\nu} u_\nu - r_{ko}^* u_o r_{i\mu} r_{\mu\nu} u_\nu &= i B x r_{ik} + (2 A x - y) r_{ik}^* \\ &+ i B (u_i r_{k\nu} u_\nu - u_k r_{i\nu} u_\nu) + 2 A (u_i r_{k\nu}^* u_\nu - u_k r_{i\nu}^* u_\nu). \end{aligned} \quad (152)$$

Die andere Gleichung ergibt sich hieraus, wenn man alle r_{ik} durch r_{ik}^* ersetzt und $r_{k\mu}^* r_{\mu\nu}^* u_\nu$ usw. nach (22) verwandelt (A geht in A , B in B und y in $2 A x - y$ über). Die Richtigkeit dieser Formeln und damit der gemachten Annahme kann man schließlich bestätigen — ein kürzerer Beweis gelang mir leider nicht — indem man sie in Raumvektoren schreibt. — Es sind hiernach, wie man leicht überlegt, alle mit $r_{\mu\nu}$ und u_λ zu bildenden, antisymmetrischen Tensoren auf die Form (51) zu bringen, mit Ausnahme des quadratischen $r_{io} r_{o\tau} u_\tau u_k - r_{ko} r_{o\tau} u_\tau u_i$ und des dazu dualen $r_{io} u_o r_{k\tau}^* u_\tau - r_{ko} u_o r_{i\tau}^* u_\tau$.

¹⁾ H. Minkowski, Mathem. Annalen **68**, 472, 1910.

Zu (144): Man fasse ϱ_2 und ϱ_3 neben $\varrho_1 = \frac{2}{\hbar} C$ als Operatoren auf, die im Sinne von (141) eine Funktion $\psi(C)$ transformieren. Macht man den allgemeinen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 &= u_2 e^{i\frac{\varphi}{2}} + v_2 e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \\ \varrho_3 &= u_3 e^{i\frac{\varphi}{2}} + v_3 e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

so erhält man aus den VR. (101), die links ϱ_1 enthalten, nach (143) leicht

$$u_3 = -iu_2, \quad v_3 = iv_2. \quad (154)$$

Nun ist z. B. $\varrho_2 \psi(C) = u_2(C) \psi(C - \hbar) + v_2(C) \psi(C + \hbar)$. Soll C nur die Eigenwerte $\pm \hbar/2$ haben, so müssen ϱ_2 und ϱ_3 die Eigenfunktionen $\psi(\hbar/2)$ und $\psi(-\hbar/2)$ unter sich transformieren. Das ist nur der Fall, wenn $u_2(-\hbar/2) = 0$ und $v_2(+\hbar/2) = 0$ ist. Da $C^3 = \hbar^2/4 \cdot C$ ist, kommen nur lineare u_2, v_2 in Frage. Also ist bis auf Faktoren (λ', λ''):

$$u_2 = \lambda' \left(C + \frac{\hbar}{2} \right), \quad v_2 = \lambda'' \left(C - \frac{\hbar}{2} \right). \quad (155)$$

Die dritte VR. verlangt dann $\lambda' \lambda'' = -1/\hbar^2$, was durch

$$\lambda' = \frac{i}{\hbar} e^{i\delta}, \quad \lambda'' = \frac{i}{\hbar} e^{-i\delta} \quad (156)$$

erfüllt werden kann. Die Phase δ bleibt unbestimmt. Die Gleichungen (153) mit (154), (155) und (156) ergeben die Gleichungen (144) des Textes.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Seminar der Universität.

Bemerkung

zu der Arbeit von H. Gockel und M. Schuler: „Über eine neue Schuler-Uhr mit Selbstantrieb und die Gangleistung zweier Schuler-Pendel von Mai bis September 1937“¹⁾.

Von A. Scheibe in Berlin.

(Eingegangen am 26. Juli 1938.)

Die Verfasser bestimmen experimentell das log. Dekrement des Schuler-Pendels zu $9,54 \cdot 10^{-6}$ für die *Halbschwingung*. Dies ergibt, in üblicher Weise auf eine ganze Schwingung bezogen, ein log. Dekrement zu $19,08 \cdot 10^{-6}$. Das Ergebnis wird von ihnen mit den Worten „Eine so kleine Reibung ist unseres Wissens bisher sonst noch nicht erzielt worden. Selbst ein zu Hochfrequenzschwingungen angeregter Quarzkristall hat nicht diese kleine Dämpfung“ diskutiert.

Dieser Ansicht der Verfasser muß widersprochen werden. Von Van Dyke²⁾ wurden bereits im Jahre 1935 log. Dekremente von schwingenden Quarzkristallen im Betrage bis herab zu $5,4 \cdot 10^{-6}$ gemessen. A. Scheibe und E. v. Ferroni³⁾ bestimmten das log. Dekrement des in den Quarzuhren verwendeten Steuerquarzes zu $13 \cdot 10^{-6}$. Die mit Quarzkristallen erzielbaren Dämpfungen liegen also noch unterhalb des Dekrementes des Schuler-Pendels.

¹⁾ ZS. f. Phys. **109**, 442, 1938. — ²⁾ K. S. Van Dyke, Proc. Inst. Rad. Eng. **23**, 386, 1935; siehe auch A. Scheibe, Piezoelektrizität des Quarzes, S. 181, Dresden 1938. — ³⁾ A. Scheibe u. E. v. Ferroni, Phys. ZS. **39**, 258, 1938.